TUDNIVALÓK

- **A zárthelyi dolgozatban 6-7 feladat lesz.**
- A dolgozatot kék vagy fekete színű tollal írják. Tollon kívül más segédeszköz nem használható, számológép sem!
- Aki nem megengedett segédeszközt használ vagy a dolgozatírás alatt Hallgatótársaival kommunikál, nem folytathatja a dolgozat írását, dolgozatára 0 pontot fog kapni (a dolgozat pótlása ebben az esetben nem lehetséges), és azon jogát is elveszti, hogy a gyakorlati jegyét vizsgajegyként fogadtathassa el.
- A dolgozatírás alatt a termet nem hagyhatják el. Aki elhagyja a termet, az nem folytathatja a dolgozatírást.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre, a közös kezdéstől számítva.

1. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(2,-3,-2,3),(1,-2,-1,0),(-1,2,1,-2),(0,1,0,-3)$$

vektorrendszerének rangját, és döntse el, hogy lineárisan független-e, generátorrendszer-e, illetve bázis-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben. $(x \text{ pont})$

2. Feladat. Döntse el az a valós paraméter függvényében, hogy a $V=\mathbb{R}^4$ vektortér

$$(1,-1,2,3),(2,-1,3,7),(1,-1,a^2+a,4),(1,-1,2,a^2+2)$$

vektorrendszere lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e. $(x \text{ pont})$

3. Feladat. Adja meg a v vektor koordinátasorát a V vektortér megadott bázisában:

(a) $V=\mathbb{R}^2$, $v=(1,3)$, bázis: $(-2,3),(1,0)$;

(b) $V=\mathbb{R}^3$, $v=(3,0,1)$, bázis: $(1,-2,1),(3,0,-1),(3,3,3)$.

$(x \text{ pont})$

4. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrixok rangját, valamint adjon meg bennük egy maximális méretű nemnulla aldeterminánst:

(a) $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&-2&4\\-3&3&-6\end{pmatrix}$; (b) $B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\-1&5&-6\end{pmatrix}$.

$(x \text{ pont})$

5. Feladat. Határozza meg az $A=\begin{pmatrix}1&2&1&1\\-1&-1&-1&-1\\2&3&a^2+a&2\\3&7&4&a^2+2\end{pmatrix}$ mátrix rangját az a valós paraméter függvényében. $(x \text{ pont})$

6. Feladat. Adjon meg fundamentális megoldásrendszert az

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5&=0\\2x_1-x_2+2x_3+x_4+3x_5&=0\\x_1-x_2+3x_3+x_4-2x_5&=0\end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében. $(x \text{ pont})$

7. Feladat.

(a) Határozza meg az $A=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit.

(b) Adjon meg bázist a $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében.

(x pont)

8. Feladat. Hozza kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozza meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.).

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $x_1^2 - 4x_2x_1 + 4x_3x_1 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 8x_2x_3$; (b) $V = \mathbb{R}^2$, $2x_1^2 + 2x_2x_1 + 13x_2^2$.

(x pont)

9. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás, jelölje $\times$-szel. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz -2 pont, ha nincs válasz, 0 pont.)

I H

◯ ◯ Ha $U = \{v\}$ altere a V valós vektortérnek, akkor U dimenziója 1.

◯ ◯ Ha a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer rangja 2, akkor a v_1, v_2 vektorrendszer lineárisan független.

◯ ◯ Egy (3×3)-as valós mátrixnak legfeljebb 3 különböző sajátértéke van.

(6 pont)

10. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes. Jelölje $\times$-szel, amelyik helyes. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz vagy nincs válasz, 0 pont.)

(a) Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszert,...

◯ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan független.
◯ ha a vektorrendszer rangja $r = k$, akkor a vektorrendszer bázis.
◯ ha a vektorrendszer rangja r, akkor $r \leqslant n$.
◯ ha $k > n$, akkor a vektorrendszer generátorrendszer.

(b) Legyen A $(n \times n)$-es valós mátrix.

◯ Ha $\lambda = 0$ sajátértéke A-nak, akkor $|A| = 0$.
◯ Ha λ sajátértéke A-nak, akkor $-\lambda$ is.
◯ Ha A-nak két sajátértéke van, akkor egy kétdimenziós sajátaltere van.
◯ Ha A-nak v sajátvektora, akkor $-v$ nem sajátvektora.

(4 pont)