Tudnivalók

- **A zárthelyi dolgozatban 6-7 feladat lesz.**
- A dolgozatot kék vagy fekete színű tollal írják. Tollon kívül más segédeszköz nem használható, számológép sem!
- Aki nem megengedett segédeszközt használ vagy a dolgozatírás alatt Hallgatótársaival kommunikál, nem folytathatja a dolgozat írását, dolgozatára 0 pontot fog kapni (a dolgozat pótlása ebben az esetben nem lehetséges), és azon jogát is elveszti, hogy a gyakorlati jegyét vizsgajegyként fogadtathassa el.
- A dolgozatírás alatt a termet nem hagyhatják el.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre, a közös kezdéstől számítva.

1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixokat:

(a) A^2; (b) AB^T, A^TB; (c) $(A - A^T)B$.

(x pont)

$\boxed{\text{Eredmény.}}$ (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$;

(b) az AB^T szorzat nem definiált, $A^TB = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $(A - A^T)B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

(x pont)

$\boxed{\text{Eredmény.}}$ (a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -25$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -160.$

3. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékét, ha tudja, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0.

(x pont)

$\boxed{\text{Eredmény.}}$ Az a paraméter értéke 0 vagy $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció vagy elemi bázistranszformáció alkalmazásával:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array}\right. .$$

(x pont)

EREDMÉNY. Az egyenletrendszer megoldható: két kötött és két szabad változó lesz. Egy lehetséges általános megoldás: $x_3 = 4x_1 - x_2,\ x_4 = 2 - 11x_1 + 6x_2$ $(x_1, x_2 \in \mathbb{R})$.

5. Feladat. Az a valós paraméter függvényében határozza meg, hogy hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszernek:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

(A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!) (x pont)

EREDMÉNY. Ha $a^2 - 5a \neq 0$, azaz $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$, akkor pontosan egy megoldás van.
Ha $a = 0$, végtelen sok megoldás van.
Ha $a = 5$, az egyenletrendszernek nincs megoldása.

6. Feladat. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

EREDMÉNY. $X = \begin{pmatrix} -4 - 3x_{3,1} + 7x_{4,1} & 14 - 3x_{3,2} + 7x_{4,2} \\ 3 + 2x_{3,1} - 5x_{4,1} & -7 + 2x_{3,2} - 5x_{4,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{pmatrix}$, ahol $x_{3,1}, x_{4,1}, x_{3,2}, x_{4,2} \in \mathbb{R}$.

7. Feladat. Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(a) Működőképes-e a gazdaság?
(b) Adjuk meg a $(3, 2)^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátást.
(c) Döntsük el, hogy a $(2, 3)$ árvektor esetén mindkét ágazat nyereséges-e.

(x pont)

EREDMÉNY. Az A mátrix Leontief-inverze: $(E_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ -1 & 3/4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.
(a) A gazdaság működőképes, mivel az A mátrix Leontief-inverzének nincs negatív eleme.
(b) A bruttó kibocsátás: $(E_2 - A)^{-1} \cdot (3, 2)^T = (10, 16)^T$.
(c) Mivel $(2, 3) \cdot (E_2 - A) = (-2, 2)$, ezért az első ágazat veszteséges, a második pedig nyereséges.

8. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás, jelölje x-szel. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz -2 pont, ha nincs válasz, 0 pont.)

I H

○ ○ Tetszőleges A és B mátrixok esetén, ha $A + B$ létezik, akkor BA^T is. (Igaz)

○ ○ Ha egy lineáris egyenletrendszer három egyenletet és 2019 ismeretlent tartalmaz, akkor végtelen sok megoldása van. (Hamis)

○ ○ Ha egy invertálható mátrix minden eleme racionális szám, akkor inverzének minden eleme is racionális szám.(Igaz)

(6 pont)

9. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes. Jelölje x-szel, amelyik helyes. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz vagy nincs válasz, 0 pont.)

(a) Ha egy determináns egyik sorának az elemeit rendre egy másik sor elemeihez tartozó adjungált aldeterminánsokkal szorzunk meg, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor...

◯ 0-t kapunk.
◯ 1-et kapunk.
◯ elégtelent kapunk.
◯ bármilyen valós számot megkaphatunk.

Az 1. válasz a helyes

(b) Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg Cramer-szabállyal, ha...

◯ megoldható Gauss-eliminációval.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Gauss-eliminációval.
◯ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer nem oldható meg.

A 2. válasz a helyes

(4 pont)