Tudnivalók

- **A zárthelyi dolgozatban 6-7 feladat lesz.**
- A dolgozatot kék vagy fekete színű tollal írják. Tollon kívül más segédeszköz nem használható, számológép sem!
- Aki nem megengedett segédeszközt használ vagy a dolgozatírás alatt Hallgatótársaival kommunikál, nem folytathatja a dolgozat írását, dolgozatára 0 pontot fog kapni (a dolgozat pótlása ebben az esetben nem lehetséges), és azon jogát is elveszti, hogy a gyakorlati jegyét vizsgajegyként fogadtathassa el.
- A dolgozatírás alatt a termet nem hagyhatják el.
- A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésükre, a közös kezdéstől számítva.

1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Számítsa ki a következő mátrixokat:

(a) A^2; (b) AB^T, A^TB; (c) $(A - A^T)B$.

(x pont)

2. Feladat. Határozza meg az alábbi determinánsok értékét:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

(x pont)

3. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékét, ha tudja, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & a & 1 \\ 2a & 1 & a \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 0. (x pont)

4. Feladat. Oldja meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció vagy elemi bázistranszformáció alkalmazásával:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & - & 6x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \end{array} \right. .$$

(x pont)

5. Feladat. Az a valós paraméter függvényében határozza meg, hogy hány megoldása van a következő lineáris egyenletrendszernek:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array} \right. .$$

(A megoldásokat nem kell megadni, csak a számukat!) (x pont)

6. Feladat. Oldja meg az alábbi mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

(x pont)

7. Feladat. Legyen egy gazdaság ráfordítási mátrixa $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/8 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}$.

(a) Működőképes-e a gazdaság?

(b) Adjuk meg a $(3, 2)^T$ nettó kibocsátáshoz tartozó bruttó kibocsátást.

(c) Döntsük el, hogy a $(2, 3)$ árvektor esetén mindkét ágazat nyereséges-e.

(x pont)

8. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás, jelölje x-szel. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz -2 pont, ha nincs válasz, 0 pont.)

I H

○ ○ Tetszőleges A és B mátrixok esetén, ha $A + B$ létezik, akkor BA^T is.

○ ○ Ha egy lineáris egyenletrendszer három egyenletet és 2019 ismeretlent tartalmaz, akkor végtelen sok megoldása van.

○ ○ Ha egy invertálható mátrix minden eleme racionális szám, akkor inverzének minden eleme is racionális szám.

(6 pont)

9. Feladat. A megadott négy válaszból csak az egyik helyes. Jelölje x-szel, amelyik helyes. (Jó válasz 2 pont, hibás válasz vagy nincs válasz, 0 pont.)

(a) Ha egy determináns egyik sorának az elemeit rendre egy másik sor elemeihez tartozó adjungált aldeterminánsokkal szorzunk meg, és ezeket a szorzatokat összeadjuk, akkor...

○ 0-t kapunk. ○ 1-et kapunk.
○ elégtelent kapunk. ○ bármilyen valós számot megkaphatunk.

(b) Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg Cramer-szabállyal, ha...

○ megoldható Gauss-eliminációval.
○ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Cramer-szabállyal.
○ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldható Gauss-eliminációval.
○ az $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer nem oldható meg.

(4 pont)