Lineáris algebra

(10A103)

Kátai-Urbán Kamilla

Tudnivalók (I.)

- Honlap: http://www.math.u-szeged.hu/~katai
- Jegyzet:
    - Az előadáson készített jegyzet.
    - Megyesi László: Lineáris algebra.

Tudnivalók (II.)

- Vizsga: írásban (100 perc), feltétele a Lineáris algebra gyakorlat sikeres teljesítése;
  - ♣ I/H kérdések (20 pont)
  - ♢ számolós feladatok (50 pont)
  - ♡ definíciók, tételkimondások (10 pont)
  - ♠ két paraméteres feladat (20 pont)
- Mintavizsgák a félév közepe táján kerülnek fel a honlapra.
- Ponthatárok:
  - $[0, 48) \rightsquigarrow$ elégtelen (1)
  - $[48, 64) \rightsquigarrow$ elégséges (2)
  - $[64, 78) \rightsquigarrow$ közepes (3)
  - $[78, 90) \rightsquigarrow$ jó (4)
  - $[90, 100] \rightsquigarrow$ jeles (5)

Tudnivalók (II.)

A gyakorlat sikeres teljesítése esetén a gyakorlati jegy vizsgajegyként is elfogadható*.

A gyakorlati jegy megszerzése után nyilatkozniuk kell (a CooSpace felületén) legkésőbb **2019. május 28. éjfélig**, hogy élni kívánnak-e ezzel a lehetőséggel.

* Ez a lehetőség csak a 2016/17-es tanévtől érvényes, aki korábban teljesítette a gyakorlatot, annak vizsgáznia kell.

Tudnivalók (III.)

- 100 pontot lehet elérni, ponthatárok ugyanazok, mint a vizsgán.
- A 100 pont a következőképpen áll össze: 10 pont a két „kis" zárthelyi dolgozatból, 90 pont a két „nagy" zárthelyi dolgozatból.
- A „kis" zárthelyi dolgozatok NEM javíthatók és NEM pótolhatók. Az egyik „nagy" zárthelyi dolgozat javítható „xor" pótolható.
- A „nagy" zárthelyi dolgozatok időpontjai:
  - 1. „nagy" zárthelyi dolgozat: **2019. március 22.** (péntek, 08:00-09:30, Bolyai épület II. emelet),
  - 2. „nagy" zárthelyi dolgozat: **2019. május 10.** (péntek, 08:00-09:30, Bolyai épület II. emelet),
  - Pótlás/Javítás: **2019. május 17.** (péntek, 08:00-09:30, Bolyai épület II. emelet).

1. Előadás

Mátrixok

- $(n \times m)$-es mátrix: „táblázat”, melynek n sora és m oszlopa van.
- KEREK zárójelek között.
- Elemei $\mathbb{R}$ elemei, azaz VALÓS számok.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0.5 \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

- A *mátrixokat* általában nagybetűkkel jelöljük ($A, B, C, \ldots$). Az $A \in \mathbb{R}^{5\times 6}$ mátrix egy 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- *Mátrix elemei*: a B mátrix i-edik sorának $j$edik elemére használhatjuk a b_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet $(B)_{ij}$-vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

$$\mathbb{R}^{n\times m} \ (n, m \in \mathbb{N})$$

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & b_{ij} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Példa

Sütöde „termelési” mátrixa

$$\begin{array}{l} \\ \text{kenyér (1 kg)} \\ \text{kifli (8 db)} \\ \text{zsemle (12 db)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{liszt (kg)} & \text{víz (l)} & \text{só (dkg)} & \text{energia (kWh)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\ 0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\ 0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sütöde „árfolyam” mátrixa

$$\begin{array}{l} \\ \text{liszt (Ft/kg)} \\ \text{víz (Ft/l)} \\ \text{só (Ft/dkg)} \\ \text{energia (Ft/kWh)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 220 & 230 & 235 \\ 20 & 15 & 14 \\ 5 & 4 & 6 \\ 40 & 41 & 35 \end{pmatrix} \end{array}$$

Mennyibe került egy kenyér előállítása december 1-én?

$$\begin{array}{l} \\ \text{kenyér} \\ \text{kifli} \\ \text{zsemle} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{liszt (kg)} & \text{víz (l)} & \text{só (dkg)} & \text{energia (kWh)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\ 0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\ 0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \\ \text{liszt} \\ \text{víz} \\ \text{só} \\ \text{energia} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 220 & 230 & 235 \\ 20 & 15 & 14 \\ 5 & 4 & 6 \\ 40 & 41 & 35 \end{pmatrix} \end{array}$$

Egy kenyér előállítása december 1-én

$$0.8 \cdot 220 + 0.3 \cdot 20 + 3.0 \cdot 5 + 2.4 \cdot 40 = 293.0$$

Ft-ba került.

$$\begin{array}{c} \\ \text{kenyér} \\ \text{kifli} \\ \text{zsemle} \end{array} \begin{array}{cccc} \text{liszt} & \text{víz} & \text{só} & \text{energia} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l|cccc} & \text{liszt} & \text{víz} & \text{só} & \text{energia} \\ \hline \text{kenyér} & 0.8 & 0.3 & 3.0 & 2.4 \\ \text{kifli} & 0.6 & 0.2 & 2.0 & 2.0 \\ \text{zsemle} & 0.8 & 0.3 & 2.0 & 1.9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|ccc} & \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \\ \hline \text{liszt} & 220 & 230 & 235 \\ \text{víz} & 20 & 15 & 14 \\ \text{só} & 5 & 4 & 6 \\ \text{energia} & 40 & 41 & 35 \end{array}$$

Hasonlóképpen számíthatóak ki a következő táblázat elemei.

$$\begin{array}{l|ccc} & \text{dec. 1.} & \text{dec. 2.} & \text{dec. 3.} \\ \hline \text{kenyér} & 293.0 & 298.9 & 294.2 \\ \text{kifli} & 226.0 & 231.0 & 225.8 \\ \text{zsömle} & 268.0 & 274.4 & 270.7 \end{array}$$

Markov-láncok

A költözés dinamikája

Egy nagyon kis (2 településből álló) ország populációdinamikáját modellezzük borzasztó egyszerűen: megnézzük, hogy egy évben az A településből hányan költöznek B-be, és viszont (a lakosság minden más változásától most eltekintünk). Ha az oszlopokban azt ábrázoljuk, hogy a lakosság hányad része maradt a városban, illetve költözött el, akkor a következő mátrixot állíthatjuk össze:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- Ezen egyszerű modell szerint a két város összlakosságszáma változatlan. Ez matematikailag is igazolható?
- Úgy tűnik, hogy hosszú távon A egyre gyarapodik, B pedig fogy, egészen addig, amíg egy egyensúlyi állapot beáll. Igaz-e ez minden esetben?
- Ha van egyensúlyi állapot, akkor vajon egyértelmű-e?
- Ha van egyensúlyi állapot, és egyértelmű, akkor meg tudjuk-e hatékony módon határozni?

A fenti kérdések megválaszolására többféle matematikai eszköz áll a rendelkezésünkre:

- mátrixműveletek, gyors hatványozás,
- vektorterek, alterek, dimenzió fogalma,
- mátrix sajátértéke, sajátaltere.

A költözés dinamikája

Ha A lakosainak száma 10 000 és B lakosainak száma pedig 50 000, akkor mennyi lesz a lakosok száma egy év múlva az egyes városokban?
Világos, hogy A és B lakosainak száma

$$\begin{aligned} A:&\ \ 0.8 \cdot 10\,000 + 0.3 \cdot 50\,000 = 23\,000, \\ B:&\ \ 0.2 \cdot 10\,000 + 0.7 \cdot 50\,000 = 37\,000 \end{aligned}$$

lesz egy év múlva.

A fenti számolások nagyon hasonlítanak a sütödés példában szereplőkhöz.
Mindkét példa mögött ugyanaz a matematikai jelenség, a

mátrixszorzás

áll.

Mátrixszorzás

Definíció: mátrixok szorzása

Ha A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix, akkor létezik a szorzatuk, $A \cdot B$, amely $(n \times k)$-s mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.

Definíció: a szorzata elemei

Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i-edik sorának j-edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i-edik sorának elemeit B j-edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott számokat összeadjuk.

Példa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4, \\ c_{12} &= 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5, \\ c_{21} &= (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7, \\ c_{22} &= (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5. \end{aligned}$$

Mátrixszorzás

Ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, akkor AB és BA is létezik.

Az AB mátrix 2-dik sorának 3-adik eleme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -33 & 94 \\ 40 & -101 & \boxed{286} \\ 156 & -429 & 1234 \end{pmatrix}$$

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 27 \cdot 9 = 286.$$

Mátrixszorzás definíciója

Legyen A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix $(n \times k)$-s, i-edik sorának j-edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,m}b_{m,j} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot b_{tj}.$$

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

1. példa

$A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem létezik.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ NEM LÉTEZIK.}$$

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

2. példa

$A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

3. példa

$A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Összeadás

Definíció: mátrixok összegének létezése

Ha az A és B mátrixok $(n \times m)$-es mátrixok, akkor összeadhatók. Az összegük is $(n \times m)$-es mátrix lesz, azaz csak azonos méretű mátrixok adhatók össze.

Definíció: mátrixok összege

Az összegmátrix i-edik sorának j-edik eleme A i-edik sora j-edik elemének és B i-edik sora j-edik elemének az összege, azaz a mátrixokat elemenként adunk össze.

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Példa

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{pmatrix}, = \begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 5\\ 4 & 5\end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1+2, & c_{12} &= (-2)+(-1),\\ c_{21} &= 3+0, & c_{22} &= 4+1,\\ c_{31} &= 2+2, & c_{32} &= 1+4. \end{aligned}$$

Mátrix szorzása skalárral

Skalár = valós szám

Létezés

Mindig létezik.

Definíció: mátrix szorzása skalárral

Az A mátrixot úgy szorzzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ-val.

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Példa

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & \sqrt{2} & e^2 \\ 3 & -2 & \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es.

Definíció: mátrix transzponáltja

Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Műveleti tulajdonságok

- $(A+B)+C = A+(B+C)$;
- $A+B = B+A$;
- $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$;
- $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$ és $(B+C)\cdot A = B\cdot A + C\cdot A$;
- $(A^T)^T = A$;
- $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$.

Valahányszor az adott egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

Jelölés

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ekkor $A^k = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k \text{ db}}$.

Speciális mátrixok

Definíció: szimmetrikus mátrix.

Az A mátrix szimmetrikus, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

Példa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés:

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $(n \times n)$-es. Az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ négyzetes mátrix főátlóját az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ elemek alkotják.

Definíció: trianguláris mátrix.

Egy $(n \times n)$-es mátrixot triangulárisnak nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa:

- $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ (felső trianguláris mátrix),
- $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ (alsó trianguláris mátrix).

Definíció: diagonális mátrix.

Az $(n \times n)$-es A mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

Példa:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Definíció: egységmátrix.

Az $(n \times n)$-es egységmátrix az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n.

Példa:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

Definíció: zérómátrix.

Az $(n \times n)$-es zérómátrix az a mátrix, amelynek minden eleme 0.
Jele: Z_n vagy 0_n.

Példa:

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

Igaz vagy Hamis?

- Nem léteznek olyan A és B mátrixok, amelyekre $AB = BA$.

Hamis, pl: $A = E_n$ és B tetszőleges $(n \times n)$-es mátrixokra teljesül.

- Bármely A és B azonos méretű négyzetes mátrixok esetén
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Hamis, $(A + B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$ és a mátrixszorzás nem kommutatív.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ és

(a) $m = k$, akkor $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.

(b) $n = m = k = l$, akkor $A \cdot B = B \cdot A$.

(c) $n = m$, $k = l$, akkor $A + B$ létezik.

(d) $n = m$, $k = l$, akkor A^3 és B^3 is létezik.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times l}$ és

(a) $m = k$, akkor $(A \cdot B)^T = A^T \cdot B^T$.

(b) $n = m = k = l$, akkor $A \cdot B = B \cdot A$.

(c) $n = m$, $k = l$, akkor $A + B$ létezik.

(d) $n = m$, $k = l$, akkor A^3 és B^3 is létezik.

A (d) állítás az igaz.