

10. Előadás

változók / határozatlanok:

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

A polinom foka: $\max(7,10,15) = 15$.

$$2017x_1^2x_3x_4^4 + 4x_1x_2^3x_3x_4^4x_5 + 26x_1^5x_2^5x_4^5$$

monomok

Homogén másodfokú (3-határozatlanú) polinom

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 7x_1x_2 - 11x_1x_3 + 13x_2x_3$$

Kvadratikus

Kvadratikus alakok

Definíció (Kvadratikus alakok).

A homogén másodfokú többváltozós polinomok által definiált polinomfüggvényeket **kvadratikus alakoknak** nevezzük.

Példa.

- Kvadratikus alakok:

$$x_1^2, \quad q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1) = x_1^2,$$

$$-x_1^2 - x_3^2, \quad q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_3^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3, \quad q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3, \quad q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3.$$

- Az alábbi polinomok nem definiálnak kvadratikus alakokat:

$$x_1^3, \quad -x_1^2 - x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + 3x_1x_3.$$

Kvadratikus alakok

Példa.

Tekintsük az $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3$ homogén másodfokú 3-változós polinomot. A hozzá tartozó kvadratikus alak:

$$q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_3.$$

Pl.: ha $v = (1, 2, 3)$, akkor $q(v) = 1^2 + 2^2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = -4$.

(n -változós) Kvadratikus alak \mathbb{R}^n -beli vektorokhoz valós számokat rendel.

A homogén másodfokú n -változós polinomok általános alakja:

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1^2 & + & 2a_{1,2}x_1x_2 & + & 2a_{1,3}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1,n}x_1x_n \\
 & & a_{2,2}x_2^2 & + & 2a_{2,3}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2,n}x_2x_n \\
 & & & & a_{3,3}x_3^2 & + & \cdots & + & 2a_{3,n}x_3x_n \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & + & a_{n,n}x_n^2
 \end{array}$$

azaz

$$\sum_{j=1}^n a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2a_{j,k}x_jx_k.$$

A homogén másodfokú n -változós polinomok általános alakja:

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{1,1}x_1^2 & + & 2a_{1,2}x_1x_2 & + & 2a_{1,3}x_1x_3 & + & \cdots & + & 2a_{1,n}x_1x_n \\
 & & a_{2,2}x_2^2 & + & 2a_{2,3}x_2x_3 & + & \cdots & + & 2a_{2,n}x_2x_n \\
 & & & + & a_{3,3}x_3^2 & + & \cdots & + & 2a_{3,n}x_3x_n \\
 & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & + & a_{n,n}x_n^2
 \end{array}$$

azaz

$$\sum_{j=1}^n a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2a_{j,k}x_jx_k.$$

Definíció (Kvadratikus alak mátrixa).

A $\sum_{j=1}^n a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2a_{j,k}x_jx_k$ polinomhoz tartozó

$$q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2a_{j,k}x_jx_k$$

kvadratikus alak **mátrixa** az $A_q = (a_{i,j})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, ahol $a_{k,j} = a_{j,k}$ ($1 \leq j < k \leq n$)

Példa.

Legyen $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3$. Ekkor q mátrixa:

$$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Kvadratikus alak mátrixa mindig szimmetrikus négyzetes mátrix.

Tétel.

- (a) Legyen $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (n -változós) kvadratikus alak, melynek mátrixa $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor tetszőleges $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$q(v) = v^T \cdot A_q \cdot v$$

teljesül.

- (b) Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixra a $q_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto v^T \cdot A \cdot v$ leképezés kvadratikus alak, melynek mátrixa A .
- (c) Ha az A és B ($n \times n$)-es szimmetrikus mátrixok különbözőek, akkor $q_A \neq q_B$.

Példa.

Legyen $q = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 6x_2x_3 - 4x_3^2$. Ekkor q mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

és

$$q = (x_1, x_2, x_3) \cdot A_q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ha $v = (3, 1, 4)$, akkor

$$q(v) = \underbrace{(3, 1, 4) \cdot A_q}_{(19, 2, -4)} \cdot (3, 1, 4)^T = (19, 2, -4) \cdot (3, 1, 4)^T = 43.$$

Definíció (Majdnem kanonikus alak).

A $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}x_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} 2a_{j,k}x_jx_k$ kvadratikus alak **majdnem kanonikus alakú**, ha $a_{j,k} = 0$ ($1 \leq j < k \leq n$).

Tétel.

A q kvadratikus alak pontosan akkor majdnem kanonikus alakú, ha mátrixa diagonális.

Példa.

Az

$$-2x_1^2, \quad 2x_1^2 + 3x_2^2, \quad 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2, \quad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

kvadratikus alakok majdnem kanonikus alakúak.

Definíció (Szimmetrizált elemi átalakítások).

Az A szimmetrikus négyzetes mátrix **szimmetrizált elemi átalakításai** az alábbiak:

- ① az A mátrix i -edik és j -edik sorának cseréje, majd az A mátrix i -edik és j -edik oszlopának cseréje,
- ② az A mátrix i -edik sorát szorozzuk egy $c \neq 0$ valós számmal, majd az A mátrix j -edik oszlopának szorzása a c számmal,
- ③ az A mátrix i -edik sorának c -szeresét hozzáadjuk a j -edik sorához, majd az A mátrix i -edik oszlopának c -szeresét hozzáadjuk a j -edik oszlopához ($c \in \mathbb{R}$).

Tétel.

Tetszőleges A szimmetrikus négyzetes mátrix szimmetrizált elemi átalakításokkal diagonális alakra hozható úgy, hogy a diagonális mátrix főátlójában -1 -esek, 1 -esek és 0 -ák vannak.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Ekkor

$$A \xrightarrow[\text{[2]+(-2)×[1]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{[3]+(-3)×[1]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{[3]+(-1)×[2]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1/√6·[3]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

azaz $A \xrightarrow{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Tétel.

Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixok. Ha $A \stackrel{\text{sz.}}{\sim} B$, akkor q_A és q_B értékkészlete megegyezik, valamint ugyanannyi helyen veszik fel értékül a 0-át.

Ha a $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix diagonális, $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, ahol $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 0, 1\}$, akkor a következő esetek lehetségesek:

(1) $a_1 = \dots = a_n = 1$, ekkor

$$q_D = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

$q(v) \geq 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = 0$;

(2) $a_1 = \dots = a_n = -1$, ekkor

$$q_D = -x_1^2 - \dots - x_n^2,$$

$q(v) \leq 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = 0$;

(3) $a_1 = \dots = a_p = 1$, $a_{p+1} = \dots = a_n = 0$ ($0 \leq p < n$), ekkor

$$q_D = x_1^2 + \dots + x_p^2,$$

$q(v) \geq 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha
 $v = (0, \dots, 0, *, \dots, *)$, ahol az első p komponens 0;

(4) $a_1 = \dots = a_m = -1$, $a_{m+1} = \dots = a_n = 0$ ($0 \leq m < n$), ekkor

$$q_D = -x_1^2 - \dots - x_m^2,$$

$q(v) \leq 0$ és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha
 $v = (0, \dots, 0, *, \dots, *)$, ahol az első m komponens 0;

(5) $a_1 = \dots = a_p = 1$, $a_{p+1} = \dots = a_{p+m} = -1$, $a_{p+m+1} = \dots = a_n = 0$ ($0 < p, m < n$), ekkor

$$q_D = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+m}^2$$

és q értékkészlete \mathbb{R} .

Példa.

Legyen $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ egy q kvadratikus alak mátrixa.

A korábbi számolás alapján $A_q \stackrel{\text{sz.}}{\sim} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Az előző jelöléseket használva $p = 1$, $m = 2$ és q_D értékészlete \mathbb{R} , tehát az (5) esethez tartozik.

Definíció (Kvadratikus alakok osztályozása).

Legyen $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ekkor

- 1 q **pozitív definit**, ha $q(v) \geq 0$ ($v \in \mathbb{R}^n$) és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \mathbf{0}$;
- 2 q **negatív definit**, ha $q(v) \leq 0$ ($v \in \mathbb{R}^n$) és $q(v) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $v = \mathbf{0}$;
- 3 q **pozitív szemidefinit**, ha $q(v) \geq 0$ ($v \in \mathbb{R}^n$), és van olyan $v \neq \mathbf{0}$, amelyre $q(v) = 0$;
- 4 q **negatív szemidefinit**, ha $q(v) \leq 0$ ($v \in \mathbb{R}^n$), és van olyan $v \neq \mathbf{0}$, amelyre $q(v) = 0$;
- 5 q **indefinit**, ha q értékészlete \mathbb{R} .

Tétel (Sylvester Tehetetlenségi Tétéle).

Legyen $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus alak. Ekkor teljesülnek az alábbiak.

- (a) q mátrixa szimmetrizált elemi átalakításokkal diagonális alakra hozható, sőt olyan $D \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ diagonális mátrix is van, amelyre $A_q \stackrel{\text{sz.}}{\sim} D$ teljesül.
- (b) Ha $D_1, D_2 \in \{-1, 0, 1\}^{n \times n}$ olyan diagonális mátrixok, amelyekre $D_1 \stackrel{\text{sz.}}{\sim} A_q \stackrel{\text{sz.}}{\sim} D_2$ teljesül akkor a D_1 és D_2 mátrixok főátlójában lévő (-1) -esek, 1 -esek és 0 -ák száma megegyezik.

Példa.

Legyen $q = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$. Ekkor q mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{SZ.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így q kanonikus alakja $y_1^2 + y_2^2$, azaz q pozitív szemidefinit.

Tétel (Oszályozás kanonikus alakban).

Legyen $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus alak, melynek kanonikus alakja:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+m}^2.$$

- 1 Ha $p = n$, akkor q pozitív definit.
- 2 Ha $p < n$ és $m = 0$, akkor q pozitív szemidefinit.
- 3 Ha $m = n$, akkor q negatív definit.
- 4 Ha $m < n$ és $p = 0$, akkor q negatív szemidefinit.
- 5 Ha $p, m > 0$, akkor q indefinit.

Tétel (Kanonikus és majdnem kanonikus).

Legyen $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kvadratikus alak, melynek majdnem kanonikus alakja:

$$a_1 y_1^2 + \cdots + a_n y_n^2. \text{ Ekkor } q \text{ kanonikus alakja}$$

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+m}^2, \text{ ahol } p = |\{i \mid a_i > 0\}| \text{ és } m = |\{i \mid a_i < 0\}|.$$

Példa.

Legyen q az a kvadratikus alak, amelynek mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $q = 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$ és

$$A_q \xrightarrow[\text{[1]+1}\times\text{[2]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{[2]+(-1/2)}\times\text{[1]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5/2 \\ 1 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[\text{[3]+(-1/4)}\times\text{[2]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5/2 \\ 0 & -5/2 & -1/4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{[3]+(-5/2)}\times\text{[2]}]{\text{SZ.}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

Így q majdnem kanonikus alakja $4y_1^2 - y_2^2 + 6y_3^2$, aminek következtében q kanonikus alakja $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, azaz q indefinit.

Példa.

Legyen q az a kvadratikus alak, amelynek mátrixa

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$q(0, 1, 1) = (0, 1, 1) \cdot A_q \cdot (0, 1, 1)^T = (5, -2, -2) \cdot (0, 1, 1)^T = -4,$$

$$q(1, 1, 0) = (1, 1, 0) \cdot A_q \cdot (1, 1, 0)^T = (2, 2, 1) \cdot (1, 1, 0)^T = 4,$$

így q indefinit.

Definíció (Főminor).

Legyen $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ négyzetes mátrix. Ekkor A **főminorjainak** nevezzük az

$$|a_{1,1}|, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

determinánsokat, azaz a mátrix „bal felső sarok” aldeterminánsait.

Példa.

Az $A = (i \cdot j - |i - j|)_{4 \times 4}$ mátrix főminorjai:

$$|1| = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 8, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{vmatrix} = 20.$$

Tétel (Főminorok és PDKA-k).

A q kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A_q minden főminora pozitív.

Példa.

$$A \ q = 16u^2 + 2ux + 12uy + 22uz + x^2 + 2xy + 2xz + 4y^2 + 10yz + 9z^2$$

kvadratikus alak pozitív definit, mivel mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 11 \\ 1 & 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}$,

melynek minden főminora pozitív.

(Vö.: $q = (x + y + z + u)^2 + 3(y + 8/6z + 5/3u)^2 + 8/3(z + 5/4u)^2 + 5/2u^2$.)

Tétel (Főminorok és NDKA-k).

A q kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha A_q főminorjai váltakozó előjelűek és az első főminor negatív.

Megjegyzés.

Ha az A mátrix k -edik főminora d_k , akkor a $-A$ mátrix k -edik főminora $(-1)^k d_k$. Ha a q kvadratikus alak pozitív definit, akkor a $-q$ kvadratikus alak negatív definit, melynek mátrixa $-A$.

Példa.

A $q = -x^2 - 2xy - 2y^2 - 2xz - 4yz - 3z^2$ kvadratikus alak negatív definit,

mivel mátrixa $A_q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, melynek főminorai: -1 , 1 és -1 .

(Vö.: $q = -(x + y + z)^2 - (y + z)^2 - z^2$.)

Igaz vagy Hamis?

- Tetszőleges q kvadratikus alak esetén $q(\mathbf{0}) = 0$.

Igaz, mivel a kvadratikus alakok homogén másodfokú kifejezések, így nem tartalmaznak konstans, tehát ha minden változó helyébe 0-t írunk, akkor a függvény értéke 0.

- Van olyan kvadratikus alak, amelynek kanonikus alakja kevesebb változót tartalmaz, mint a kvadratikus alak.

Igaz, például a $q = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ kvadratikus alak kanonikus alakja y_1^2 .

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy q kvadratikus alak mátrixa, ekkor ...

- (a) $A_q \neq A_q^T$.
- (b) A_q főátlójában nem lehet 0.
- (c) ha q kvadratikus alak negatív szemidefinit, akkor a kanonikus alakjához tartozó mátrix determinánsa 0.
- (d) ha $q(v) \geq 0$ minden $v \in \mathbb{R}^n$ -re teljesül, akkor van olyan $v \neq \mathbf{0}$, amelyre $q(v) = 0$.

Feleletválasztás

A négy állítás közül pontosan egy igaz.

Legyen $A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy q kvadratikus alak mátrixa, ekkor ...

- (a) $A_q \neq A_q^T$.
- (b) A_q főátlójában nem lehet 0.
- (c) ha q kvadratikus alak negatív szemidefinit, akkor a kanonikus alakjához tartozó mátrix determinánsa 0.
- (d) ha $q(v) \geq 0$ minden $v \in \mathbb{R}^n$ -re teljesül, akkor van olyan $v \neq 0$, amelyre $q(v) = 0$.

A (c) állítás az igaz.