7. Feladatsor - Mátrix inverze, Leontyev-modell

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, X. fej. $1, 2, 4$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok: X. fej. $3, 5, 6$.

7.1. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét (amennyiben létezik).

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket.

(a) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.3. Feladat. Az alábbi mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntsük el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsuk meg, hogy összesen mennyi terméket kell előállítani a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz. Vizsgáljuk meg, hogy a (2, 3) árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek.

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Szorgalmi feladatok

7.4. Feladat. Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.5. Feladat. Határozzuk meg, hogy milyen x valós számok esetén invertálható az alábbi mátrix, valamint adjuk is meg az inverzét (természetesen x függvényében).

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.6. Feladat. Legyen A $n \times n$-es invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy az A inverzének kiszámítása során fellépő generáló elemek szorzatának abszolútértéke megegyezik A determinánsának abszolútértékével.

7.7. Feladat. Egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy az egyes ágazatokban előállított termékek ára: $10, 15$, illetve 5 Ft. Mely ágazatok nyereségesek, illetve veszteségesek? Próbáljunk meghatározni olyan árakat, amelyek mellett a gazdaságban nem lesz veszteséges ágazat.

7.8. Feladat. Az x paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

$$\begin{pmatrix} 0.2 & x \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

7.9. Feladat. Az x paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & x \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

7.10. Feladat. Egy működésképtelen gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$$

A gazdaságot modernizálni próbáljuk: a mátrix bármely elemének 1-gyel történő módosításának a költsége 1 milliárd Ft. Hogyan lehet a legolcsóbban elérni, hogy a gazdaság már éppen működőképes legyen?