5. Feladatsor - Lineáris függetlenség, bázis, koordinátasor

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, III. fej. $1, 2, 3$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, III. fej. $4, 5$. IV. fej. $1, 2, 3$.

5.1. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $(1,\ 0,\ 1), (1\ ,1\ ,1), (1\ ,0\ ,1)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $(1,\ 2,\ 1), (1,\ -1,\ 1), (1,\ 1,\ 0)$;
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $(1,\ -2,\ 4), (2,\ -3,\ 1), (-4,\ 5,\ 5)$;
(d) $V = \mathbb{R}^4$, $(1,\ -2,\ 3,\ 4), (0,\ -3,\ 1,\ 2), (2\ -4,\ 5,\ 9)$;
(e) $V = \mathbb{R}^5$, $(1, -2, 0, 3, 1), (0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1)$.

5.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját.

(a) $(1, 0, 1, 1), (-1, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 2)$;
(b) $(1, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, -2, 1, 0)$;
(c) $(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -1, 1), (1, 1, 2, 3)$.

5.3. Feladat. Döntsük el a V vektortér adott vektorrendszeréről, hogy bázisa-e, generátorrendszere-e V-nek.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1)$;
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $(1, 2, -1), (-1, 1, 1), (1, 2, 0)$;
(d) $V = \mathbb{R}^4$, $(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1)$.

5.4. Feladat. Adjuk meg a v vektor koordinátasorát a megadott bázisban.

(a) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$;
(b) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3)$;
(c) $v = (1, 2, 1)$, bázis: $(-1, 2, 1), (1, 2, 3), (-1, 1, 1)$;
(d) $v = (1, 2, 1, 2)$, bázis: $(-1, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -2, -2)$.

5.5. Feladat. Határozzuk meg $\mathbb{R}^4$ következő altereinek dimenzióját és egy bázisát.

(a) $U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)]$;
(b) $U = [(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)]$;
(c) $U = [(1, -1, 1, 2), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 3, 4)]$.

5.6. Feladat. Legyen V 10 dimenziós vektortér, U_1 8 dimenziós, U_2 9 dimenziós altér V-ben. Hány dimenziós lehet az $U_1 \cap U_2$ altér?

Szorgalmi feladatok

5.7. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a V vektortérben az alábbi vektorok lineársian függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

(a) $V = \mathbb{R}^4$; $\quad v_1 = (1, -4, 3, 2)$, $v_2 = (-1, 4, -2, -4)$, $v_3 = (3 - 12, x, 10)$;
(b) $V = \mathbb{R}^5$; $\quad v_1 = (-1,\ -3,\ 2,\ 1,\ -1)$, $v_2 = (-2,\ -8,\ 7,\ 3,\ -1)$, $v_3 = (1,\ 9\ -11,\ -4,\ x)$.

5.8. Feladat. Adjuk meg, mikor lesz lineárisan függő, illetve független a következő vektorrendszer az x valós paraméter függvényében.

$$(1,-1,2,1),(2,-1,x+3,x),(1,0,x+1,2x-2)$$

5.9. Feladat. Tegyük fel, hogy egy valós vektortérben a $v_1,\dots,v_m$ vektoroknak csak véges sok lineáris kombinációja állítja elő a nullvektort. Következik-e ebből, hogy a vektorrendszer lineárisan független?

5.10. Feladat. Tegyük fel, hogy v_1,v_2,v_3 közül egyik sem a nullvektor. Mit állíthatunk v_1 és v_3 viszonyáról lineáris függőség, illetve függetlenség szempontjából, ha

(a) v_1,v_2 lineáris függő, v_2,v_3 lineárisan függő,
(b) v_1,v_2 lineárisan független, v_2,v_3 lineárisan függő,
(c) v_1,v_2 lineárisan független, v_2,v_3 lineárisan független?

5.11. Feladat. A v_1,v_2,v_3,v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1,v_2,v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?

5.12. Feladat. Határozzuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy a következő vektorrendszer rangja a legkisebb legyen.

$$(2,-4,1),(-1,3,1),(-3,x,12)$$

5.13. Feladat. Határozzuk meg az alábbi vektorrendszer rangját az x paraméter függvényében.

$$(1,-1,2,1),(1,0,3,0),(2,-1,x+4,x^2-3x+3),(-1,4,x,x-6)$$

5.14. Feladat. Az x paraméter függvényében vizsgáljuk meg, hogy a következő vektorrendszer generátorrendszere-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek.

$$(1,-1,x),(x,0,1),(1,1,-2)$$

5.15. Feladat. Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek:

(a) $(1,-1,0,1),(1,1,1,0),(-1,x,2,1)$;
(b) $(-1,1,0,1),(x,1,2,1),(1,x,-1,2),(1,0,1,0)$.

5.16. Feladat. Adjunk meg bázist $\mathbb{R}^{100}$ alábbi altereiben, és határozzuk meg a dimeziójukat.

(a) $U_1=\{(x_1,\dots,x_{100}):\ x_1=x_3=\dots=x_{99}=0\}$;
(b) $U_2=\{(x_1,\dots,x_{100}):\ x_1+x_2+\dots+x_{50}=x_{51}+x_{52}+\dots+x_{100}\}$.

5.17. Feladat. Döntsük el, hogy meg lehet-e adni egy 99-dimenziós vektortérben két 50-dimenziós alteret úgy, hogy csak a nullvektor a közös elemük?