4. Feladatsor - Vektortér, altér, generálás

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok II. fej. $1, 2, 3, 6, 7$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, II. fej. $4, 5, 8, 9, 10$.

4.1. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1x_2 + x_3 = 0\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 0\}$;
(f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$.

4.2. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(a) $v = (1, -1, 1),\ U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$;
(b) $v = (1, 1, 1),\ U = [(1, -1, 2), (1, 0, 1)]$;
(c) $v = (1, 2, 1),\ U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$;
(d) $v = (1, 2, 1),\ U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

4.3. Feladat. Határozzuk meg a V vektortér u és v vektorai által kifeszített alterét, (azaz adjuk meg, hogy milyen összefüggésnek kell teljesülnie például az $\mathbb{R}^3$ vektortér esetén az x_1, x_2, x_3 számokra, hogy az (x_1, x_2, x_3) vektor benne legyen a generált altérben).

(a) $V = \mathbb{R}^3, \quad u = (1, 1, 1),\ v = (1, -1, 5)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3, \quad u = (2, 2, -4),\ v = (1, 0, 3)$;
(c) $V = \mathbb{R}^4, \quad u = (2, 2, -2, 4),\ v = (-4, -5, 6, -5)$.

Szorgalmi feladatok

4.4. Feladat. Igazoljuk, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^\lambda.$$

4.5. Feladat. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, valamint $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ és $u, v \in V$. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (A válaszokat indokoljuk!)

(a) Ha $v \neq \underline{0}$ és $\lambda v = \mu v$, akkor $\lambda = \mu$.
(b) Ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda u = \lambda v$, akkor $u = v$.
(c) Ha $u \neq \underline{0}, v \neq \underline{0}, \lambda \neq 0, \mu \neq 0$ és $\lambda u = \mu v$, akkor $\lambda = \mu$ és $u = v$.

4.6. Feladat. Legyen W altér a valós számtest feletti V vektortérben, $u, v, w \in V$, és tegyük fel, hogy

$$u + v \in W, \quad v + 2w \notin W, \quad w + 3u \in W.$$

Mit állíthatunk az $5u + 3v + w$, illetve $6u + 3v + w$ vektorok és W kapcsolatáról?

4.7. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

4.8. Feladat. Legyen $U = [(1, 2, 1), (-1, 1, 1)], V = [(0, 3, 2), (-2, -1, 0)]$ két altere az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

4.9. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}, V = [(1, 2, 1)]$ alterek $\mathbb{R}^3$-ben. Igaz-e, hogy $U = V$?

4.10. Feladat. Az alábbi $U, V \subseteq \mathbb{R}^4$ alterekre teljesül-e az $U = V$ egyenlőség? Adjuk meg lineáris egyenletek segítségével az U alteret!

$$U = [(1, -1, 2, 0), (0, 1, 4, 1)], \qquad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon 2x_1 - x_3 + 4x_4 = 0\}.$$

4.11. Feladat. Döntsük el, hogy az x valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme az $(-1, -3, x + 1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér

$$[(1, 2, -x), (1, 1, 0), (1, x + 2, -2)]$$

alterének.

4.12. Feladat. Döntsük el, hogy az x valós paraméter mely értékei esetén lesz eleme a $(2, -1, 1)$ vektor az $\mathbb{R}^3$ vektortér

$$[(1, -1, 1), (1, 0, 1 - x), (-1, x + 1, -2)]$$

alterének.