

8. Feladatsor - Sajátérték, Kvadratikus alak

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, XI. fej. 11, 12; XII. fej. 1-4.

8.1. Feladat. Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad (d) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

8.2. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében bázist.

$$(a) A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \lambda = 1,$$
$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2,$$
$$(c) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \lambda = -1.$$

8.3. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra a következő valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.)

$$(a) x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,$$
$$(b) -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2,$$
$$(c) 8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3,$$
$$(d) x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3,$$
$$(e) 2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Szorgalmi feladatok

8.4. Feladat. Adjuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melyekre az alábbi mátrixnak a -2 nem sajátértéke.

$$\begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ a+2 & a \end{pmatrix}$$

8.5. Feladat. Adjuk meg az a paraméter összes olyan értékét, melyekre az alábbi mátrixnak a 2 nem sajátértéke.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8.6. Feladat. Adjunk meg olyan, 0 -t nem tartalmazó mátrixot, melynek $(1, -1, 3)$ sajátvektora.

8.7. Feladat. Adjunk meg olyan, 0 -t nem tartalmazó 3×3 -as mátrixot, melynek a -3 sajátértéke.

8.8. Feladat. Az a paraméter milyen értékei esetén sajátvektora az $(1, -1, a)$ vektor az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak?