6. Feladatsor - Elemi bázistranszformáció

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, VII. fej. $1, 2, 3, 4$. IX. fej. $1, 2, 4$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, VI. fej. $5, 6, 7, 8$.

6.1. Feladat. Hajtsunk végre elemi bázistranszformációt a $*$-gal jelölt generálóelemmel.

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 1^* & 2 & -1 \\ e_2 & 2 & -1 & 2 \\ e_3 & 1 & 1 & 1 \end{array}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 2 & -2 & 1 \\ e_2 & 0 & -2 & 3 \\ e_3 & 1 & 2^* & -3 \end{array}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{c|ccc} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline e_1 & 2 & 1 & 2 \\ e_2 & -2^* & 1 & 2 \\ e_3 & 2 & 1 & 2 \end{array}, \qquad \text{(d)}\quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline e_1 & 3 & -1 & 2 & -3 \\ e_2 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ e_3 & 2 & -2 & 3^* & 2 \end{array}.$$

6.2. Feladat. Elemi bázistranszformáció segítségével adjunk meg maximális lineárisan független részrendszert az alábbi vektorrendszerekben.

(a) $(1, 1, 0), (-1, 2, 1), (0, 3, 1), (2, -1, -1)$;
(b) $(1, 1, -1, 0), (1, 2, 1, 1), (2, 3, 0, 1), (0, 1, 2, 1), (3, 4, -1, 1)$;
(c) $(1, 1, -1, 1), (-1, 0, 1, 2), (1, 1, 1, 1), (-1, 1, 1, 1)$.

6.3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.4. Feladat. Oldjuk meg a **3.1.–3.7.** feladatokat elemi bázistranszformáció segítségével.

6.5. Feladat. Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_3 & = & 0 \end{array},$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array},$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{lcl} x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Szorgalmi feladatok

6.6. Feladat. Hány maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsa van az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.7. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját a λ paraméter függvényében:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

6.8. Feladat. Határozzuk meg az x paraméter értékétől függően a következő mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ x & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

6.9. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & 5x_2 & - & 14x_3 & = & a \end{array}$$

6.10. Feladat. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldását az a valós paraméter értékétől függően.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 8x_3 & + & ax_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & + & 2x_4 & = & 7 \\ -x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 5 \end{array}$$

6.11. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

(a) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
(b) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
(c) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
(d) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
(e) Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
(f) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
(g) Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

6.12. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldásterében.

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - ax_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$