2. Feladatsor - Determinánsok

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, I. fej. $1, 3, 4, 5$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, I. fej. 10.

2.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}.$$

2.2. Feladat. Írjuk fel az alábbi determinánsok kifejtését a megadott soruk/oszlopuk szerint.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \text{2. sor;} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \text{3. oszlop.}$$

2.3. Feladat. Nullázzuk ki a $*$-gal megjelölt elem sorát/oszlopát az adott elem segítségével az alábbi determinánsban.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ oszlop;} \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ sor.}$$

2.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} 12 & -21 & 11 \\ -11 & 23 & -20 \\ 15 & 14 & -13 \end{vmatrix}; \qquad \text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \text{(f)} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{(g)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \qquad \text{(h)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Szorgalmi feladatok

2.5. Feladat. Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi determináns értéke 0, illetve 30 legyen.

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

2.6. Feladat. Helyettesítsük az alábbi determináns első sorának egy elemét egy valós számmal úgy, hogy a determinánsa 0 legyen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

2.7. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely, nem 0 értékű determináns első sorában található olyan elem, amit le lehet úgy cserélni, hogy a determináns már 0 legyen.

2.8. Feladat. Igaz-e, hogy bármely 0 értékű determináns első sorában megváltoztatható egy elem úgy, hogy az értéke már ne 0 legyen?

2.9. Feladat. Ha olyan nemnulla determinánsú $n \times n$-es mátrixot akarunk felírni, amelyben minden elem nulla vagy egy, akkor legalább hány egyest kell felhasználnunk? És mennyi a nullák számának minimuma?

2.10. Feladat. Egy determináns főátlójában minden elem γ, a többi helyen pedig δ áll. Számítsuk ki a determinánst.

A következő feladatokban a determinánsok értékét kell kiszámolni, ha nem derül ki a determináns rendje, akkor n-ed rendűnek kell tekinteni.

2.11. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

2.12. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2.13. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.14. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

2.15. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 & \dots & 1+a_1b_n \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 & \dots & 1+a_2b_n \\ 1+a_3b_1 & 1+a_3b_2 & 1+a_3b_3 & \dots & 1+a_3b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+a_nb_1 & 1+a_nb_2 & 1+a_nb_3 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$$

2.16. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):

(1) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám.
(2) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determinánsa is irracionális szám.
(3) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
(4) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
(5) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

2.17. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):

(1) Ha egy 2×2-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának konstansszorosa.
(2) Ha egy 2×2-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának konstansszorosa.
(3) Ha egy 3×3-as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának konstansszorosa.
(4) Ha egy $n \times n$-as mátrix minden eleme páros szám, akkor a mátrix determinánsa 2^n-nel osztható egész szám.