1. Feladatsor - Mátrixok

Ajánlott gyakorló feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, V. fej. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$.

Ajánlott nehezebb feladatok:

- Megyesi László: Lineáris algebra feladatok, V. fej. $7, 10$.

1.1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek).

$$AB,\ BA,\ CB,\ BC,\ DC,\ CD,\ EB^T,\ BF,\ E^TA,$$
$$F^2,\ D^TC^T,\ (A+B)C,\ (A+B^T)D,\ AD+B^TD.$$

1.2. Feladat. Számítsuk ki az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely A-val felcserélhető, azaz $AB = BA$ teljesül!

1.4. Feladat. Szorozzuk össze az alábbi mátrixokat blokkosan.

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

(b) $$\left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

1.5. Feladat. Az alábbi blokkos felbontások közül mely esetben végezhető el a blokkos szorzás?

(a) $$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

$$\text{(b)} \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right);$$

$$\text{(c)} \quad \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Szorgalmi feladatok

1.6. Feladat. Elemezzük az $(AB)^3 = A^3B^3$ egyenlőséget értelmezhetőség szempontjából, azaz:

(a) Előfordulhat-e, hogy a bal oldal létezik, de a jobb nem?
(b) Előfordulhat-e, hogy a jobb oldal létezik, de a bal nem?
(c) Előfordulhat-e, hogy mindkét oldal létezik, de különböző méretűek?

1.7. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan B mátrixot, amely A-val felcserélhető, azaz $AB = BA$ teljesül!

1.8. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan 2×2-es valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

1.9. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

1.10. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^n.$$

1.11. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

1.12. Feladat. Négyzetes mátrix nyomának nevezzük a főátlójában lévő elemek összegét. Jele: tr A. Igazoljuk, hogy ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

1.13. Feladat. Legyen A valós mátrix és tegyük fel, hogy az AA^T mátrix nyoma 0. Határozzuk meg A-t. (Mátrix nyoma: ld. **1.12. Feladat.)**

1.14. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $n \times n$-es mátrixok esetén,

(a) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;
(b) $(AB)^T = A^TB^T$;
(c) $A^nA^m = A^{nm}$.