**Név:** ______________________________

**EHA:** ______________________________

| 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

# Lineáris algebra

## Mintavizsga

*A dolgozat megírására 90 perc áll rendelkezésre. A dolgozatírás során semmilyen segédeszköz sem használható (számológép sem). Automatikusan elégtelen jegyet kap az, aki puskázik, puskát hoz a tanterembe, feladatot másol le, vagy engedi azt lemásolni.*

**Az 1. és 2. feladatból összesen legalább 25 pontot el kell érni, különben a vizsga elégtelen.**

**1. Feladat.** ($10 \times 2$ pont) Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. Helyes válasz 2 pont, hibás válasz $-1$ pont, ha nincs válasz, 0 pont.

| | |
|---|---|
| Ha $A$ és $B$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor $AB = BA$. | |
| Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor az értéke nem változik. | |
| Ha egy lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor. | |
| Bármely $V$ vektortér és $v_1, v_2, v_3 \in V$ esetén $v_1 + 2v_2 - v_3 \in [v_1, v_2]$. | |
| Ha a Leontyev-inverz tartalmaz pozitív számot, akkor a gazdaság működőképes. | |
| Ha egy vektor koordinátasora egy bázisban $(1,\ 2,\ -1)$, akkor a bázis bármely vektorával kicserélhető. | |
| Az $(1, -1, 2), (-2, 2, -4)$ vektorrendszer rangja 2. | |
| Azonos méretű invertálható mátrixok szorzata is invertálható. | |
| Ha egy kvadratikus alak mátrixának főminorjai: $-1, -2, -3$, akkor a kvadratikus alak negatív definit. | |
| Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak sajátértéke a 2. | |

**2. Feladat.** ($6 \times 5$ pont) A táblázatba csak a végeredményeket írja be. A részfeladatokra 0 vagy 5 pont kapható.

| | |
|---|---|
| Határozza meg az $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ determináns értékét. | |
| Határozza meg az $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ lineáris egyenletrendszer általános megoldását. | |
| Adja meg az $(1, 0, 1),\ (-1, 1, 2),\ (1, -2, -2)$ bázisban a $v = (1, -1, 1)$ vektor koordinátáit. | |
| Számítsa ki a $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját, valamint adja meg egy maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsát. | |
| Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix egy sajátértéke a 2. Adja meg a 2 sajátérékhez tartozó sajátaltér egy bázisát. | |
| Határozza meg az $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2$ kvadratikus alak osztályát (pozitív/negatív definit/szemidefinit, indefinit). | |

**3. Feladat.** ($5 \times 6$ pont) Definiálja az alábbi fogalmakat, illetve mondja ki a tételeket.

Determinánsok szorzástétele:

Definiálja a vektorrendszer lineáris függetlenségét, valamint mondjon ki két tételt, ami lineárisan függő vektorrendszerre vonatkozik:

Vektortér bázisa, alterek dimenziótétele:

Oszloprang, sorrang, mátrix rangja, rangszámtétel:

Negatív definit kvadratikus alak (értékkészlet szerinti osztályozással):

**4. Feladat.** (10 pont) Igazoljuk, hogy ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely vektor, amely előáll a vektorrendszerből lineáris kombinációként, csak egyféleképpen állhat elő (nem kaphatjuk meg ugyanazt a vektort többféle lineáris kombináció eredményeként).

**5. Feladat.** (10 pont) Előfordulhat-e elemi bázistranszformáció során, hogy a táblázatban bizonyos számok nem változnak? Ha igen, akkor mely elemekkel fordulhat elő, és milyen esetekben?