9. feladatsor – Kvadratikus alakok – Eredmények

9.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Minden kvadratikus alak kanonikus alakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.

(b) Minden kvadratikus alak normálalakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.

(c) Kvadratikus alakok bármely bázisban felírt mátrixának rangja ugyanaz.

(d) Bármely A négyzetes mátrixhoz létezik olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.

(e) Bármely normálalak esetén a pozitív tagok száma megegyezik a negatív tagok számával.

(f) Ha egy kvadratikus alak pozitív definit, akkor bármely vektort behelyettesítve a kvadratikus alakba pozitív számot kapunk.

(g) Ha egy kvadratikus alak negatív szemidefinit, akkor bármely vektort behelyettesítve a kvadratikus alakba nem kapunk pozitív számot.

(h) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A főminorai pozitívak.

(i) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha A főminorai negatívak.

Eredmény. igaz: (a),(b),(c),(g),(h)
hamis: (d),(e),(f),(i)

9.2. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi $\ell\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezések közül? Ha leképezés bilineáris, akkor adja meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adja meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

(a) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_2y_2$;

(b) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3$;

(c) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_1y_1$;

(d) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2$;

(e) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Eredmény. (a) bilineáris, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $q((x_1,x_2)) = x_2^2$

(b) nem bilineáris

(c) bilineáris, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) nem bilineáris

(e) bilineáris, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $q((x_1,x_2)) = x_1^2 + x_2^2$

9.3. Feladat. Hozza kanonikus alakra az $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett kvadratikus alakokat, és adjon meg egy olyan nemelfajuló lineáris helyettesítés mátrixát, amely az adott kvadratikus alakor erre a kanonikus alakra hozza. Továbbá adja meg a kvadratikus alak egy normálalakját is, és határozza meg az osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

(a) $n = 2,\ x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2;$
(b) $n = 2,\ -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2;$
(c) $n = 2,\ -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2;$
(d) $n = 3,\ -4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2;$
(e) $n = 3,\ 8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3;$
(f) $n = 3,\ x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$
(g) $n = 3,\ x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$
(h) $n = 3,\ 2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3;$
(i) $n = 3,\ -x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3;$
(j) $n = 3,\ x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3;$
(k) $n = 4,\ -x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3;$
(l) $n = 4,\ x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 8x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 8x_3x_4;$
(m) $n = 8,\ x_4x_7.$

Eredmény.

	kanonikus alak	helyettesítés mátrixa	definitségi osztály	normálalak
(a)	y_1^2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	pozitív szemidefinit	z_1^2
(b)	$-4y_1^2 - 3y_2^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	negatív definit	$-z_1^2 - z_2^2$
(c)	$-4y_1^2 - 3y_2^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	negatív definit	$-z_1^2 - z_2^2$
(d)	$-4y_1^2 - 3y_2^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	negatív szemidefinit	$-z_1^2 - z_2^2$
(e)	$y_2^2 + y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	pozitív szemidefinit	$z_2^2 + z_3^2$
(f)	$y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	pozitív definit	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
(g)	$y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	pozitív definit	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
(h)	$-2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 2y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	indefinit	$-z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$
(i)	$-y_1^2 - 2y_2^2 - 5y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	negatív definit	$-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$
(j)	$y_1^2 + 3y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	pozitív szemidefinit	$z_1^2 + z_3^2$
(k)	$-y_1^2 - 2y_2^2 - 5y_3^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	negatív szemidefinit	$-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$
(l)	$y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 - y_4^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \\ 13 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	indefinit	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_4^2$
(m)	$2y_4^2 - \frac{1}{2}y_7^2$		indefinit	$z_4^2 - z_7^2$

9.4. Feladat. Adjon meg az alábbi A szimmetrikus mátrixok esetén olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális.

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Eredmény. Lásd az előző feladat megoldásait rendre a (b),(e),(h),(l) pontokban.