9. feladatsor – Kvadratikus alakok

9.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Minden kvadratikus alak kanonikus alakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.

(b) Minden kvadratikus alak normálalakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.

(c) Kvadratikus alakok bármely bázisban felírt mátrixának rangja ugyanaz.

(d) Bármely A négyzetes mátrixhoz létezik olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre az SAS^T mátrix diagonális.

(e) Bármely kvadratikus alak normálalakjában a pozitív tagok száma megegyezik a negatív tagok számával.

(f) Ha egy kvadratikus alak pozitív definit, akkor bármely vektort behelyettesítve a kvadratikus alakba pozitív számot kapunk.

(g) Ha egy kvadratikus alak negatív szemidefinit, akkor bármely vektort behelyettesítve a kvadratikus alakba nem kapunk pozitív számot.

(h) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A főminorai pozitívak.

(i) Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha A főminorai negatívak.

9.2. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi $\ell\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leképezések közül? Ha a leképezés bilineáris, akkor adja meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adja meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

(a) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_2y_2$;

(b) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 3$;

(c) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_2 - x_1y_1$;

(d) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2$;

(e) $\ell((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$.

9.3. Feladat. Hozza kanonikus alakra az $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett kvadratikus alakokat, és adjon meg egy olyan nemelfajuló lineáris helyettesítés mátrixát, amely az adott kvadratikus alakot erre a kanonikus alakra hozza. Továbbá határozza meg a kvadratikus alak definitségi osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit), és adja meg normálalakját is.

(a) $n = 2$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;

(b) $n = 2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;

(c) $n = 2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;

(d) $n = 3$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;

(e) $n = 3$, $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;

(f) $n = 3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(g) $n = 3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

(h) $n = 3$, $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;

(i) $n = 3$, $-x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(j) $n = 3$, $x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$;

(k) $n = 4$, $-x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;

(l) $n = 4$, $x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 8x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 8x_3x_4$;
(m) $n = 8$, x_4x_7.

9.4. Feladat. Adjon meg az alábbi A szimmetrikus mátrixok esetén olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre az SAS^T mátrix diagonális.

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;
(b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;
(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;
(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Szorgalmi feladatok

9.5. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<k} x_ix_k$ kvadratikus alakot.

9.6. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\sum_{i<k} x_ix_k$ kvadratikus alakot.

9.7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha két kvadratikus alak bármelyikét át lehet vinni a másikba (akár elfajuló) lineáris helyettesítéssel, akkor nemelfajuló helyettesítéssel is át lehet vinni őket.

9.8. Feladat. Adjon példát olyan $\mathbb{R}^4$-en értelmezett kvadratikus alakra, amely

(a) 1 tagot tartalmaz és indefinit;
(b) 8 (nemnulla) tagot tartalmaz és pozitív definit;
(c) 6 (nemnulla) tagot tartalmaz és negatív szemidefinit.

9.9. Feladat. Mutassa meg, hogy egy pozitív definit kvadratikus alakban minden négyzetes tag együtthatója pozitív, de ez a tulajdonság nem elegendő ahhoz, hogy a kvadratikus alak pozitív definit legyen.

9.10. Feladat. Igazolja, hogy egy kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha mátrixa előáll QQ^T alakban, ahol Q nemelfajuló mátrix.

9.11. Feladat. Igaz-e, hogy tetszőleges azonos méretű pozitív definit A és B mátrix esetén

(a) $A + B$
(b) AB
(c) A^{-1}

is pozitív definit?

9.12. Feladat. Bizonyítsa be, hogy egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A minden főminora pozitív.

9.13. Feladat. Bizonyítsa be, hogy egy pozitív definit kvadratikus alak mátrixában a főátlóra szimmetrikus összes aldetermináns (tehát az összes $M_{i_1,\ldots,i_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ alakú aldetermináns, ahol $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ lehetséges sorindexek) pozitív.

9.14. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha egy pozitív definit kvadratikus alakhoz hozzáadjuk egy lineáris (azaz egy $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ $(c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R})$ alakú) kifejezés négyzetét, akkor az összegként kapott kvadratikus alak mátrixának determinánsa nagyobb, mint az eredeti kvadratikus alak mátrixának determinánsa.

9.15. Feladat. Igazolja, hogy egy r rangú n ismeretlenes kvadratikus alak pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha vannak olyan páronként különböző (de nem feltétlenül növekvő) $1 \leq i_1, ..., i_r \leq n$ egészek, amelyekre a kvadratikus alak mátrixában az $M_{i_1,\ldots,i_k}^{i_1,\ldots,i_k}$ $(k = 1, ..., r)$ aldeterminánsok mindegyike pozitív.