8. feladatsor – Lineáris leképezések mátrixa, sajátértéke, sajátvektora – Eredmények

8.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) A bázisáttérés mátrixának determinánsa nem 0.
(b) Minden lineáris leképezés rangja egyenlő az összes mátrixának rangjával.
(c) Bármely két azonos típusú mátrix összegének rangja legfeljebb akkora, mint a tagok rangjának minimuma.
(d) Bármely két azonos típusú négyzetes mátrix szorzatának rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tényezők rangjának összege.
(e) Minden vektortéren van olyan lineáris transzformáció, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.
(f) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátértéke.
(g) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 szám.
(h) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén egyetlen olyan lineáris transzformáció van, amelynek sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér kétdimenziós.
(i) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér egydimenziós.
(j) Két azonos típusú mátrix pontosan akkor hasonló, ha mindkettő egy-egy lineáris transzformáció mátrixa valamely bázisban.
(k) Hasonló mátrixok nyoma és sajátértékei megegyeznek.
(l) Vannak olyan hasonló mátrixok, amelyek rangja különböző.
(m) Minden lineáris transzformációnak diagonális a mátrixa valamely bázisban.
(n) Egy mátrixnak pontosan akkor sajátértéke a 0 szám, ha a mátrix nemelfajuló.
(o) Ha két négyzetes mátrix karakterisztikus polinomja azonos, akkor a mátrixok hasonlók.

Eredmény. (a)–(e) igaz, igaz, hamis, igaz, igaz
(f)–(j) igaz, igaz, igaz, igaz
(k)–(o) igaz, hamis, hamis, hamis, hamis

8.2. Feladat. Döntse el, hogy izomorfak-e a megadott U és V vektorterek. Ha igen, akkor adjon is meg egy izomorfizmust U-ról V-re vagy fordítva.

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $V = [(1,-2,0),(2,-3,-2),(-1,-1,6)] \subseteq \mathbb{R}^3$;
(b) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
(c) $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0,\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^3$;
(d) $U = [(1,-2,3,0),(0,-4,1,2),(-2,8,-7,-2)] \subseteq \mathbb{R}^4$,
$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,\ x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0,$
$2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Eredmény. (a) izomorfak, pl.: $\varphi_A\colon U \to V$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) nem izomorfak;
(c) izomorfak, pl.: $\varphi\colon V \to U,\ (x,y,z) \mapsto (-2x+4z, x, y, z)$;
(d) izomorfak, pl.: $\varphi_A\colon U \to V$, ahol $A = \begin{pmatrix} 45 & 11 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tekintsük a következő bázisokat a megadott vektorterekben:
(1) $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{E}\colon (1,0),(0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,-1),(-1,0)$;
(2) $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)$;
(3) $\mathbb{R}^4$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$
$\mathcal{F}\colon (1,0,-1,2),(0,1,-1,0),(1,0,0,1),(0,-1,1,2)$.

Tekintsük a következő lineáris transzformációkat, illetve leképezéseket:
(A) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az identikus transzformáció;
(B) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zérustranszformáció;
(C) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az x-tengelyre;
(D) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az y-tengelyre;
(E) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(F) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tükrözés az x,y-tengelyek síkjára;
(G) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(H) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $\pi/2$ szögű forgatás a z-tengely körül;
(I) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+3y,\ 2x-y)$;
(J) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x-y,\ x+3y)$;
(K) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (2x-y,\ x+y,\ 3x-2y-z)$;
(L) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (-x+8y-2z,\ 3y-z,\ 4y-2z)$;
(M) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (-3x+5y+z,\ x+y-9z,\ -4z)$;
(N) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x,y,u,v) \mapsto (0,\ x,\ x-2y+u,\ u+2v)$;
(O) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x,y,u,v) \mapsto (x,\ -2x+2y-3u,\ 3x-4y+u,$
$3y-5u+3v)$;
(P) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(Q) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (-x+6y,\ 2z)$;
(R) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (7x-2y,\ 3x-y,\ 4x-2y)$;
(S) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,u,v) \mapsto (-x-u+2v,\ 2x+y+4u-5v,\ x-y-u-v)$.

8.3. Feladat. Határozza meg a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések mátrixát a fent megadott $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban. (Pontosabban minden φ esetén két mátrixot kell megadni; ha pl. $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, akkor $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{E}_{(2)}}$-t és $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)},\mathcal{F}_{(2)}}$-t, ahol $\mathcal{E}_{(1)}, \mathcal{F}_{(1)}$ az (1)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_{(2)}, \mathcal{F}_{(2)}$ pedig a (2)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$.) Adja meg φ rangját is.

Eredmény. (A) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(B) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(C) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(D) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(E) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(F) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(G) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(H) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(I) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(J) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(K) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(L) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(M) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & -4 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

(N) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(3)}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(O) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(3)}} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{15}{2} & 4 & \frac{13}{2} \\ 0 & 9 & 0 & 4 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(P) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)},\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(Q) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)},\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(R) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)},\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 8 & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(S) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(3)},\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(3)},\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

8.4. Feladat. (a) Határozza meg a fenti $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok esetén az áttérés mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra, valamint az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra.

(b) Adja meg az alábbi v vektorok és a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések esetén a $v\varphi$ vektor koordinátáit mindkét bázisban:

(A)–(E),(I),(J),(R): $v = (1, -3)$;
(F)–(H),(K)–(M),(P),(Q): $v = (2, 2, 0)$;
(N),(O),(S): $v = (1, -1, 1, 0)$.

Eredmény. (a) Jelölje P a bázisáttérés mátrixát $\mathcal{E}$ bázisról $\mathcal{F}$ bázisra.

(1) $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) A táblázat a v vektorok képét tartalmazza az $\mathcal{E}$ és az $\mathcal{F}$ bázisban.

	$\mathcal{E}$	$\mathcal{F}$
(A)	$(1, -3)$	$(3, 5)$
(B)	$(0, 0)$	$(0, 0)$
(C)	$(1, 3)$	$(-3, -7)$
(D)	$(0, -3)$	$(3, 6)$
(E)	$(3, 1)$	$(-1, -5)$
(F)	$(2, 2, 0)$	$(1, 1, 1)$
(G)	$(2, 2, 0)$	$(1, 1, 1)$
(H)	$(-2, 2, 0)$	$(-1, 1, 1)$
(I)	$(-8, 5)$	$(-5, -2)$
(J)	$(4, -8)$	$(8, 12)$
(K)	$(2, 4, 2)$	$(1, 3, 1)$
(L)	$(14, 6, 8)$	$(7, 7, -1)$
(M)	$(4, 4, 0)$	$(2, 2, 2)$
(N)	$(0, 1, 4, 1)$	$(-5, 4, 5, 3)$
(O)	$(1, -7, 8, -8)$	$(-1, -11, 2, -4)$
(P)	$(2, 2)$	$(-2, 6)$
(Q)	$(10, 0)$	$(0, -10)$
(R)	$(13, 6, 10)$	$(\frac{13}{2}, 8, -2)$
(S)	$(-1, 5, 1)$	$(-\frac{1}{2}, 3, 2)$

8.5. Feladat. Határozza meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterének összes olyan lineáris transzformációját, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.

Eredmény. Azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyeknek minden bázisban ugyanaz a mátrixa az origó középpontú λ-szoros nyújtások ($\lambda \in \mathbb{R}$), mátrixuk az egységmátrix λ-szorosa.

8.6. Feladat. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak:

(a) $u = (1, -2, 3)$, $v = (2, 0, -1)$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $u=(1,-4,0,2),\ v=(2,0,-1,3),\ A=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 4 & 6\\ 1 & -3 & 2 & 3\\ 7 & 9 & 10 & 21\\ 1 & -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

(c) $u=(1,-3,4,1,-1),\ v=(2,-1,4,5,0),\ A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 4 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

Eredmény. (1) u sajátvektor, v nem;
(2) u és v sajátvektor;
(3) egyik sem sajátvektor.

8.7. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak:

(a) $\lambda=-3,\ A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4\\ -2 & -9 & 14\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$;

(b) $\lambda=2,\ A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ -2 & 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$;

(c) $\lambda=4,\ A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & -4 & 2 & 3\\ 5 & -3 & -3 & -8 & -14\\ -6 & 2 & 9 & 23 & 14\\ 3 & 0 & -4 & -18 & -3\end{pmatrix}$.

Eredmény. igen, nem, igen

8.8. Feladat. Határozza meg a következő $\mathbb{R}$ feletti mátrixok karakterisztikus polinomját és sajátértékeit, valamint adjon meg bázist a sajátalterekben:

(a) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 0 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix}1 & 13 & -4\\ 0 & -3 & 0\\ -8 & 19 & 5\end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix}5 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 8\\ 9 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & -3\end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix}12 & -6 & 7 & -1\\ 10 & -5 & 8 & 0\\ 10 & -5 & 18 & -10\\ 20 & -10 & 36 & -20\end{pmatrix}$.

Eredmény. Az első sor a karakterisztikus polinomot, a további sorok pedig egy-egy sajátértékhez tartozó sajátalteret adnak meg.

(a) x^2-3x
 $x=0$: $[(1,1)]$
 $x=3$: $[(2,-1)]$
(b) x^2-2x+3: nincs valós sajátérték
(c) $(x-3)^2(x+1)$
 $x=3$: $[(1,0,-1),(0,1,-1)]$
 $x=-1$: $[(0,1,-5)]$

(d) $-(x+3)^2(x-9)$
$x=-3$: $[(0,1,0)]$
$x=9$: $[(2,-1,-2)]$
(e) $(x+7)^2(x-8)(x-5)$
$x=-7$: $[(-3,0,4,0),(0,-1,0,2)]$
$x=8$: $[(-3,0,1,0)]$
$x=5$: $[(0,-1,0,1)]$
(f) $x^4-5x^3-24x^2$
$x=0$: $[(0,0,-2,1)]$
$x=8$: $[(-20,10,-12,5)]$
$x=-3$: $[(-2,1,-10,6)]$

8.9. Feladat. Határozza meg a fenti lineáris transzformációk ((A)–(O)) sajátértékeit, és adjon meg bázist a sajátalterekben.

Eredmény. Minden sor egy-egy sajátértéket és a hozzá tartozó sajátalteret tartalmazza.
(A) $x=1$: $[(1,0),(0,1)]$
(B) $x=0$: $[(1,0),(0,1)]$
(C) $x=1$: $[(1,0)]$
$x=-1$: $[(0,1)]$
(D) $x=0$: $[(1,0)]$
$x=1$: $[(0,1)]$
(E) nincs sajátérték-sajátvektor pár
(F) $x=1$: $[(1,0,0),(0,1,0)]$
$x=-1$: $[(0,0,1)]$
(G) $x=1$: $[(1,0,0),(0,1,0)]$
$x=0$: $[(0,0,1)]$
(H) $x=1$: $[(0,0,1)]$
(I) $x=\sqrt{7}$: $[(1+\sqrt{7},2)]$
$x=-\sqrt{7}$: $[(1-\sqrt{7},2)]$
(J) $x=2$: $[(1,-1)]$
(K) $x=-1$: $[(0,0,1)]$
(L) $x=-1$: $[(1,0,0),(0,1,4)]$
$x=2$: $[(2,1,1)]$
(M) $x=2$: $[(1,1,0)]$
$x=-4$: $[(-5,1,0)]$
(N) $x=0$: $[(0,1,2,-1)]$
$x=1$: $[(0,0,1,-1)]$
$x=2$: $[(0,0,0,1)]$
(O) $x=3$: $[(0,0,0,1)]$
$x=1$: $[(-12,-9,5,26)]$
$x=5$: $[(0,1,-1,4)]$
$x=-2$: $[(0,15,20,11)]$

8.10. Feladat. Döntse el, hogy hasonlóak-e az alábbi mátrixok:
(a) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;
(b) $\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 7\\ 2 & -4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(c) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(e) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4 & \sqrt{2} \\ 4 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(f) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Eredmény. A (b), (c), (e) feladatban megadott mátrixok hasonlók.