8. feladatsor – Lineáris leképezések mátrixa, sajátértéke, sajátvektora

8.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) A bázisáttérés mátrixának determinánsa nem 0.
(b) Minden lineáris leképezés rangja egyenlő az összes mátrixának rangjával.
(c) Bármely két azonos típusú mátrix összegének rangja legfeljebb akkora, mint a tagok rangjának minimuma.
(d) Bármely két azonos típusú négyzetes mátrix szorzatának rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tényezők rangjának összege.
(e) Minden vektortéren van olyan lineáris transzformáció, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.
(f) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátértéke.
(g) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 szám.
(h) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén egyetlen olyan lineáris transzformáció van, amelynek sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér kétdimenziós.
(i) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 szám, és amelyben a 2-höz tartozó sajátaltér egydimenziós.
(j) Két azonos típusú mátrix pontosan akkor hasonló, ha mindkettő egy-egy lineáris transzformáció mátrixa valamely bázisban.
(k) Hasonló mátrixok nyoma és sajátértékei megegyeznek.
(l) Vannak olyan hasonló mátrixok, amelyek rangja különböző.
(m) Minden lineáris transzformációnak diagonális a mátrixa valamely bázisban.
(n) Egy mátrixnak pontosan akkor sajátértéke a 0 szám, ha a mátrix nemelfajuló.
(o) Ha két négyzetes mátrix karalterisztikus polinomja azonos, akkor a mátrixok hasonlók.

8.2. Feladat. Döntse el, hogy izomorfak-e a megadott U és V vektorterek. Ha igen, akkor adjon is meg egy izomorfizmust U-ról V-re vagy fordítva.

(a) $U = \mathbb{R}^2$, $V = [(1,-2,0),(2,-3,-2),(-1,-1,6)] \subseteq \mathbb{R}^3$;
(b) $U = \mathbb{R}^3$, $V = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
(c) $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0,\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$, $V = \mathbb{R}^3$;
(d) $U = [(1,-2,3,0),(0,-4,1,2),(-2,8,-7,-2)] \subseteq \mathbb{R}^4$,
$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0,\ x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0,\ 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Tekintsük a következő bázisokat a megadott vektorterekben:

(1) $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{E}\colon (1,0),(0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,-1),(-1,0)$;
(2) $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)$;
(3) $\mathbb{R}^4$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$
$\mathcal{F}\colon (1,0,-1,2),(0,1,-1,0),(1,0,0,1),(0,-1,1,2)$.

Tekintsük a következő lineáris transzformációkat, illetve leképezéseket:

(A) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az identikus transzformáció;
(B) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zérustranszformáció;
(C) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az x-tengelyre;
(D) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az y-tengelyre;
(E) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(F) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tükrözés az x, y-tengelyek síkjára;
(G) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a merőleges vetítés az x, y-tengelyek síkjára;
(H) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a $\pi/2$ szögű forgatás a z-tengely körül;
(I) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 3y,\ 2x - y)$;
(J) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x - y,\ x + 3y)$;
(K) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2x - y,\ x + y,\ 3x - 2y - z)$;
(L) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (-x + 8y - 2z,\ 3y - z,\ 4y - 2z)$;
(M) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (-3x + 5y + z,\ x + y - 9z,\ -4z)$;
(N) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y, u, v) \mapsto (0,\ x,\ x - 2y + u,\ u + 2v)$;
(O) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y, u, v) \mapsto (x,\ -2x + 2y - 3u,\ 3x - 4y + u,\ 3y - 5u + 3v)$;
(P) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x, y-tengelyek síkjára;
(Q) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (-x + 6y,\ 2z)$;
(R) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (7x - 2y,\ 3x - y,\ 4x - 2y)$;
(S) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, u, v) \mapsto (-x - u + 2v,\ 2x + y + 4u - 5v,\ x - y - u - v)$.

8.3. Feladat. Határozza meg a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések mátrixát a fent megadott $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban. (Pontosabban minden φ esetén két mátrixot kell megadni; ha pl. $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, akkor $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}, \mathcal{E}_{(2)}}$-t és $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}, \mathcal{F}_{(2)}}$-t, ahol $\mathcal{E}_{(1)}, \mathcal{F}_{(1)}$ az (1)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_{(2)}, \mathcal{F}_{(2)}$ pedig a (2)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$.) Adja meg φ rangját is.

8.4. Feladat. (a) Határozza meg a fenti $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok esetén az áttérés mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra, valamint az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra.
(b) Adja meg az alábbi v vektorok és a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések esetén a $v\varphi$ vektor koordinátáit mindkét bázisban:

(A)–(E),(I),(J),(R): $v = (1, -3)$;
(F)–(H),(K)–(M),(P),(Q): $v = (2, 2, 0)$;
(N),(O),(S): $v = (1, -1, 1, 0)$.

8.5. Feladat. Határozza meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterének összes olyan lineáris transzformációját, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.

8.6. Feladat. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak:

(a) $u = (1, -2, 3),\ v = (2, 0, -1),\ A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $u = (1, -4, 0, 2),\ v = (2, 0, -1, 3),\ A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $u=(1,-3,4,1,-1),\ v=(2,-1,4,5,0),\ A=\begin{pmatrix}2&4&-1&1&0\\2&-2&4&-4&1\\1&-2&1&3&4\\2&3&2&1&2\\3&2&-3&1&-2\end{pmatrix}$.

8.7. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak:

(a) $\lambda=-3,\ A=\begin{pmatrix}-2&2&-4\\-2&-9&14\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$;

(b) $\lambda=2,\ A=\begin{pmatrix}1&-4&2&0\\0&-1&3&4\\-2&3&1&4\\1&2&-1&3\end{pmatrix}$;

(c) $\lambda=4,\ A=\begin{pmatrix}2&1&3&4&5\\1&4&-4&2&3\\5&-3&-3&-8&-14\\-6&2&9&23&14\\3&0&-4&-18&-3\end{pmatrix}$.

8.8. Feladat. Határozza meg a következő $\mathbb{R}$ feletti mátrixok karakterisztikus polinomját és sajátértékeit, valamint adjon meg bázist a sajátalterekben:

(a) $\begin{pmatrix}2&-1\\-2&1\end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix}3&1&-5\\0&4&-5\\0&1&-2\end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix}1&13&-4\\0&-3&0\\-8&19&5\end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix}5&0&4&0\\0&1&0&8\\9&0&-4&0\\0&4&0&-3\end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix}12&-6&7&-1\\10&-5&8&0\\10&-5&18&-10\\20&-10&36&-20\end{pmatrix}$.

8.9. Feladat. Határozza meg a fenti lineáris transzformációk ((A)–(O)) sajátértékeit, és adjon meg bázist a sajátalterekben.

8.10. Feladat. Döntse el, hogy hasonlóak-e az alábbi mátrixok:

(a) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$;

(b) $\begin{pmatrix}-6&0\\0&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&7\\2&-4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$;

(c) $\begin{pmatrix}-3&4\\-2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7&4\\-12&-7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$;

(d) $\begin{pmatrix}1&1&1\\5&5&5\\9&9&9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$;

(e) $\begin{pmatrix}6&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&4&\sqrt{2}\\4&-2&\pi\\0&0&2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

(f) $\begin{pmatrix}-1&3&3\\0&2&3\\0&0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2&1&1\\-4&3&1\\3&-3&-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$.

Szorgalmi feladatok

8.11. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér összes olyan lineáris transzformációját, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.

8.12. Feladat. Legyen φ a tér $\mathbb{R}^3$ vektorterében az origón átmenő $[(1,1,1)]$ egyenes mint tengely körüli π szögű forgatás. Adja meg φ mátrixát $\mathbb{R}^3$ valamely bázisában. Igyekezzen olyan bázist választani, amelyben φ mátrixa minél egyszerűbb. Választását indokolja!

8.13. Feladat. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak az a paraméter mely értékei esetén

(a) sajátvektora az $(1,-1,a)$ vektor;
(b) van $(0,b,a)$ alakú sajátvektora, ahol $b \in \mathbb{R}$ tetszőleges?

8.14. Feladat. Adja meg az a paraméter azon értékeit, melyekre

(a) 2 nem sajátértéke;
(b) nincs sajátértéke az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixnak.

8.15. Feladat. Határozza meg annak az $n \times n$-es mátrixnak a sajátértékeit és sajátaltereit, amely főátlójában minden elem 0, a többi elem pedig 1. Diagonalizálható-e ez a mátrix?

8.16. Feladat. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix esetén tekintsük a következő adatokat:

(1) A determinánsa és nyoma;
(2) A sajátértékei;
(3) A karakterisztikus polinomja.

Mi a kapcsolat a közöttük? (Pl. (1) ismeretében megkaphatjuk-e, és ha igen, hogyan, a (2)-beli és a (3)-beli adatokat?)

8.17. Feladat. Adja meg az összes olyan (D,S) számpárt, melyre pontosan egy olyan 2×2-es mátrix létezik, amelynek determinánsa D, és amely sajátértékeinek összege S.

8.18. Feladat. Tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén adjon meg olyan $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(1 \leq k \leq n)$ mátrixot, amelynek karakterisztikus polinomja $(\lambda - x)^n$, és a λ-hoz tartozó sajátaltere k dimenziós.

8.19. Feladat. Legyen λ sajátértéke az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak. Igazolja tetszőleges f polinom esetén, hogy ha $f(A) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.

8.20. Feladat. Legyenek az A mátrix páronként különböző sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Adja meg a következő mátrix sajátértékeit:

(a) A^2,
(b) A^{-1} (ha létezik).

8.21. Feladat. Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassa meg, hogy

(1) ha A diagonalizálható, akkor A^T is az;
(2) ha A diagonalizálható, akkor tetszőleges f polinom esetén $f(A)$ is az;
(3) ha 0 nem sajátértéke A-nak és AB diagonalizálható, akkor BA is az.