7. feladatsor – Dimenzió, lineáris leképezések – Eredmények

Ha egy feladat szövege másként nem mondja, akkor „V *vektortér*"-en egy $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) vektortér valamely alterét értjük.

7.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \dots, v_n, v$ lineárisan függő vektorrendszert alkot.
(b) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \dots, v_n, v$ nem generálja V-t.
(c) Ha egy V vektortérben nincs olyan ötelemű vektorrendszer, amely generálja V-t, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.
(d) Ha egy V vektortérben a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független, a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vektorrendszer pedig lineárisan függő, akkor a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok bázist alkotnak V-ben.
(e) Ha egy vektortérben van négyelemű lineárisan független vektorrendszer és hatelemű generátorrendszer, akkor a vektortér dimenziója 5.
(f) Ha egy n-dimenziós vektortérben valamely k-elemű lineárisan független vektorrendszernek van olyan l-elemű részrendszere, mely generálja a vektorteret, akkor $n = k = l$.
(g) A sík vektorainak eltolása az $(1, 1)$ vektorral lineáris transzformáció a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén.
(h) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterének van olyan lineáris transzformációja, amelynek magtere és képtere is kétdimenziós.
(i) Bármely vektortér összes injektív lineáris transzformációja szürjektív is.
(j) Bármely két lineáris leképezésnek értelmezve van az összege.
(k) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén definiált bármely két lineáris transzformáció összegének rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tagok rangja.

Eredmény. Igaz: a, f, i
Hamis: b, c, d, e, g, h, j, h, k

7.2. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterének dimenzióját, adjon meg bázist U-ban, majd terjessze ki a megadott bázist $\mathbb{R}^n$ bázisává:

(a) 6.11. Feladat (d)–(f);
(b) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
(c) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 - 3x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(e) $n = 5$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + 2x_3 + x_5 = 0,\ x_1 - 2x_2 - x_5 = 0\}$.

Eredmény. Több jó megoldás lehetséges, az itt megadottak csak példák.

(a) 6.11
  (d) $d = 2$, $(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3)$, kiegészítés: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$
  (e) $d = 1$, $(1, -2, -4, 3)$, kiegészítés: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$
  (f) $d = 4$, $(1, 1, -2, 0, 1, 2), (2, 3, -2, 1, 0, -1), (-1, 1, 7, 3, -2, -5)$, $(-3, 2, 4, -1, -2, 1)$, kiegészítés: $(0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)$
(b) $d = 2$: $(2, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)$, kiegészítés: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$

(c) $d = 2$: $(3, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$, kiegészítés: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)$
(d) $d = 1$: $(-3, -15, 10, 8)$, kiegészítés: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$
(e) $d = 3$: $(2, 1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, -1, -1, 0, 2)$, kiegészítés: $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$

7.3. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját. Továbbá adjon meg olyan bázist az $U_1 + U_2$ altérben, amely kiterjesztése
(i) U_1 bázisának;
(ii) $U_1 \cap U_2$ és U_1 bázisának is:

(a) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)]$, $U_2 = [(2, 1, 0, -1), (1, -1, 3, 7)]$;
(b) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1)]$,
$U_2 = [(0, 2, -3, 1), (0, -2, 4, -4), (0, -6, 11, -9)]$;
(c) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, -3, 0), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 1, -2)]$,
$U_2 = [(0, -1, 5, -7), (-2, -4, 7, -2)]$;
(d) $n = 5$, $U_1 = [(1, 2, 4, -5, 1), (0, 1, -1, 0, 2), (1, 2, 5, -7, 2)]$,
$U_2 = [(-2, -3, -6, 4, 3), (0, -2, 2, 1, -7), (-1, -2, -5, 9, -8)]$;
(e) $n = 4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$;
(f) $n = 4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0,\ 3x_3 + x_4 = 0\}$;
(g) $n = 5$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_2 + 2x_4 + x_5 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$;
(h) $n = 6$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_6 = 0\}$.

Eredmény. Minden feladatrészben megadunk egy-egy megfelelő bázist. A bázis elemszáma a dimenzió.

(a) $U_1 \cap U_2 = [(2, 1, 0, -1)]$
$U_1 = [(2, 1, 0, -1), (1, 2, 0, 1)]$
$U_1 + U_2 = [(2, 1, 0, -1), (1, 2, 0, 1), (1, -1, 3, 7)]$
(b) $U_1 \cap U_2 = [(2, 1, 0, -1)]$
$U_1 = [(2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0)]$
$U_1 + U_2 = [(2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0), (1, -1, 3, 7)]$
(c) $U_1 \cap U_2 = [(0, -2, 3, -1)]$
$U_1 = [(0, -2, 3, -1), (1, 2, 1, 3)]$
$U_1 + U_2 = [(0, -2, 3, -1), (1, 2, 1, 3), (0, -2, 4, -4)]$
(d) $U_1 \cap U_2 = [(1, 5, -3, 3, 3), (-3, -8, -3, 1, 0)]$
$U_1 = [(1, 5, -3, 3, 3), (-3, -8, -3, 1, 0), (1, 2, 4, -5, 1)]$
$U_1 + U_2 = [(1, 5, -3, 3, 3), (-3, -8, -3, 1, 0), (1, 2, 4, -5, 1), (0, -2, 2, 1, -7)]$
(e) $U_1 \cap U_2 = [\emptyset]$
$U_1 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -1)]$
$U_1 + U_2 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 0)]$
(f) $U_1 \cap U_2 = [(3, -2, 1, 3)]$
$U_1 = [(3, -2, 1, 3), (0, 0, 0, 1)]$
$U_1 + U_2 = [(1, 0, 0, 0), (3, -2, 1, 3), (0, 0, 0, 1)]$
(g) $U_1 \cap U_2 = [(-1, 0, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0, 1)]$
$U_1 = [(-1, 0, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 0)]$
$U_1 + U_2 = [(-1, 0, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 0)]$

(h) $U_1 \cap U_2 = [(1,0,0,-1,0,0),(0,0,1,0,0,-1)]$
$U_1 = [(1,0,0,-1,0,0),(0,0,1,0,0,-1),(0,0,-2,0,1,1),(0,1,-2,0,0,1)]$
$U_1{+}U_2 = [(1,0,0,-1,0,0),(0,0,1,0,0,-1),(0,0,-2,0,1,1),(0,1,-2,0,0,1),$
$(-2,0,1,1,0,0),(-2,0,0,1,1,0)]$

7.4. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ és tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén megadott φ geometriai transzformációkról, valamint az $\mathbb{R}^n$ vektorterek között megadott φ leképezésekről állapítsa meg, hogy lineárisak-e. Amennyiben igen, akkor
(i) határozza meg φ magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját;
(ii) döntse el, hogy φ injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.

(a) A sík vektorainak eltolása az $(1,1)$ vektorral;
(b) a sík vektorainak tükrözése az x-tengelyre;
(c) a sík vektorainak merőleges vetítése az y-tengelyre;
(d) a sík vektorainak $\pi/2$ szögű elforgatása az origó körül;
(e) a sík vektorainak tükrözése az $y = x$ egyenesre;
(f) a tér vektorainak tükrözése az x, y-tengelyek síkjára;
(g) a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y-tengelyek síkjára;
(h) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, xy)$;
(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, x+y)$;
(j) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x-2y, -2x+4y, -4x+8y)$;
(k) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x-y, y+1, x+z)$;
(l) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1,x_3,x_2,x_4)$;
(m) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1+cx_3, x_2+cx_4, x_3, x_4)$, ahol $c \in \mathbb{R}$;
(n) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4)$;
(o) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5,\ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1, x_1{+}2x_2, x_2{+}3x_3, x_3{+}4x_4, x_4{+}5x_5)$.

Eredmény. Csak azon tulajdonságokat tüntetjük fel (ii)-ből, amelyeket a lineáris leképezések teljesítenek. Izomorfizmus esetén nem írjuk ki az injektív és szürjektív tulajdonságokat.

(a) nem lineáris
(b) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(0,0)]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, izomorfizmus
(c) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(1,0)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(0,1)]$
(d) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, izomorfizmus
(e) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^2$, izomorfizmus
(f) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$, izomorfizmus
(g) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(1,0,0),(0,1,0)]$
(h) nem lineáris
(i) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(1,0),(0,1)]$
(j) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(2,1,0),(0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(1,-2,0)]$
(k) nem lineáris
(l) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(0,0,0,0)]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^4$, izomorfizmus
(m) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(0,0,0,0)]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^4$, izomorfizmus
(n) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [(1,-1,1,-1)]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$, szürjektív
(o) a feladat hibás – x_5 szerepel a képletben ☹

7.5. Feladat. Az előző feladatban megadott φ leképezéseket adja meg $\varphi = \varphi_A$ alakban valamely A mátrixra, amennyiben ez lehetséges.

Eredmény. (a) nem lineáris
(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) nem lineáris

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

(k) nem lineáris

(l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(o) a feladat hibás – x_5 szerepel a képletben ☹

7.6. Feladat. Adjon meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén olyan φ és ψ lineáris transzformációkat, amelyek rendelkeznek a megadott tulajdonsággal:

(a) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;

(b) φ és ψ két különböző nemidentikus bijektív transzformáció;

(c) φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben;

(d) φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben.

Eredmény. (a) φ az $y = -x$ egyenesre való merőleges vetítés
ψ az $y = x$-re való merőleges vetítés

(b) pl. tükrözés x-tengelyre, forgatás $\frac{\pi}{2}$ szöggel

(c) pl. a következő mátrixokhoz tartozó lineáris transzformációk: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) pl. $\varphi\colon (x, y) \mapsto (x, 0)$, $\psi\colon (x, y) \mapsto (0, y)$

(e) pl. $\varphi\colon (x,y)\mapsto(x,0)$, $\psi\colon (x,y)\mapsto(0,y)$

7.7. Feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortéren megadott φ és ψ lineáris transzformációkat. Milyen „ismert" lineáris transzformációval egyenlő a $\varphi\psi$ lineáris transzformáció? Továbbá döntse el, hogy fennáll-e a $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi\psi$ és $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi\psi$ egyenlőség.

(a) $n=2$, φ a zérótranszformáció, ψ az identikus transzformáció;
(b) $n=2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;
(c) $n=2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(d) $n=2$, φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
(e) $n=2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/2$ szögű forgatás;
(f) $n=3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára vonatkozó tükrözés;
(g) $n=3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára való merőleges vetítés;
(h) $n=2$, φ az $y=x$ egyenesre vonatkozó tükrözés, $\psi=\varphi_A$, ahol $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$;
(i) $n=2$, $\varphi=\varphi_A$, ahol $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés.

Eredmény. Az eredményekben (Ker) ill. (Im) jelöli, ha $\varphi\psi$ teljesíti a mag- ill. képtérre vonatkozó feltételt.

(a) zérustranszformáció, (Ker)
(b) origó körüli π szögű forgatás, (Ker), (Im)
(c) zérustranszformáció
(d) $\varphi\psi=\psi$, (Ker), (Im)
(e) origó körüli $-\frac{\pi}{6}$ szögű forgatás, (Ker), (Im)
(f) y-tengelyre való tükrözés, (Ker), (Im)
(g) y-tengelyre való merőleges vetítés
(h) vízszintes vetítés $x=y$ egyenesre $((x,y)\mapsto(y,y))$, (Im)
(i) $\varphi\psi=\psi$, (Im)

7.8. Feladat. Határozza meg a $\varphi,\psi\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ lineáris leképezések alábbi lineáris kombinációit:

(a) $3\varphi+\psi$, ahol $m=n=2$, valamint $\varphi\colon (x,y)\mapsto(x-y,\ x+3y)$ és $\psi\colon (x,y)\mapsto(x+3y,\ 2x-y)$;
(b) $2\varphi-4\psi$, ahol $m=n=3$, valamint $\varphi\colon (x,y,z)\mapsto(2x-y,\ x+y,\ 3x-2y-z)$ és $\psi\colon (x,y,z)\mapsto(-x+8y-2z,\ 3y-z,\ 4y-2z)$;
(c) $\varphi+\psi$, ahol $m=n=2$, és φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való tükrözés;
(d) $\varphi-\psi$, ahol $m=n=2$, és φ az y-tengelyre, ψ az x-tengelyre való merőleges vetítés;
(e) $\varphi-2\psi$, ahol $m=n=3$, és φ az x,y-tengelyek síkjára való tükrözés, ψ pedig az x,y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés;
(f) $2\varphi+3\psi$, ahol $m=3$, $n=2$, valamint $\varphi\colon (x,y,z)\mapsto(-x+6y,\ 2z)$, ψ pedig az x,y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés.

Eredmény. (a) $(x, y) \mapsto (4x, 5x + 8y)$
(b) $(x, y, z) \mapsto (8x - 34y + 8z, 2x - 10y + 4z, 6x - 20y + 6z)$
(c) $(x, y) \mapsto (0, 0)$
(d) $(x, y) \mapsto (2x, -2y)$
(e) $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$
(f) $(x, y, z) \mapsto (x + 12y, 3y + 4z)$