7. feladatsor – Dimenzió, lineáris leképezések

Ha egy feladat szövege másként nem mondja, akkor „V *vektortér*”-en egy $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) vektortér valamely alterét értjük.

7.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ lineárisan függő vektorrendszert alkot.
(b) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ nem generálja V-t.
(c) Ha egy V vektortérben nincs olyan ötelemű vektorrendszer, amely generálja V-t, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.
(d) Ha egy V vektortérben a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független, a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vektorrendszer pedig lineárisan függő, akkor a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok bázist alkotnak V-ben.
(e) Ha egy vektortérben van négyelemű lineárisan független vektorrendszer és hatelemű generátorrendszer, akkor a vektortér dimenziója 5.
(f) Ha egy n-dimenziós vektortérben valamely k-elemű lineárisan független vektorrendszernek van olyan l-elemű részrendszere, mely generálja a vektorteret, akkor $n = k = l$.
(g) A sík vektorainak eltolása az $(1, 1)$ vektorral lineáris transzformáció a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén.
(h) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterének van olyan lineáris transzformációja, amelynek magtere és képtere is kétdimenziós.
(i) Bármely vektortér összes injektív lineáris transzformációja szürjektív is.
(j) Bármely két lineáris leképezésnek értelmezve van az összege.
(k) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén definiált bármely két lineáris transzformáció összegének rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tagok rangja.

7.2. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterének dimenzióját, adjon meg bázist U-ban, majd terjessze ki a megadott bázist $\mathbb{R}^n$ bázisává:

(a) 6.11. Feladat (d)–(f);
(b) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
(c) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 - 3x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(e) $n = 5$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + 2x_3 + x_5 = 0,\ x_1 - 2x_2 - x_5 = 0\}$.

7.3. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját. Továbbá adjon meg olyan bázist az $U_1 + U_2$ altérben, amely kiterjesztése

(i) U_1 bázisának;
(ii) $U_1 \cap U_2$ és U_1 bázisának is:

(a) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)]$, $U_2 = [(2, 1, 0, -1), (1, -1, 3, 7)]$;
(b) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1)]$,
$U_2 = [(0, 2, -3, 1), (0, -2, 4, -4), (0, -6, 11, -9)]$;
(c) $n = 4$, $U_1 = [(1, 2, -3, 0), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 1, -2)]$,
$U_2 = [(0, -1, 5, -7), (-2, -4, 7, -2)]$;

(d) $n = 5$, $U_1 = [(1, 2, 4, -5, 1), (0, 1, -1, 0, 2), (1, 2, 5, -7, 2)]$,
$U_2 = [(-2, -3, -6, 4, 3), (0, -2, 2, 1, -7), (-1, -2, -5, 9, -8)]$;
(e) $n = 4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$;
(f) $n = 4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0,\ 3x_3 + x_4 = 0\}$;
(g) $n = 5$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_2 + 2x_4 + x_5 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$;
(h) $n = 6$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) : x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_6 = 0\}$.

7.4. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ és tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén megadott φ geometriai transzformációkról, valamint az $\mathbb{R}^n$ vektorterek között megadott φ leképezésekről állapítsa meg, hogy lineárisak-e. Amennyiben igen, akkor
(i) határozza meg φ magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját;
(ii) döntse el, hogy φ injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.

(a) A sík vektorainak eltolása az $(1, 1)$ vektorral;
(b) a sík vektorainak tükrözése az x-tengelyre;
(c) a sík vektorainak merőleges vetítése az y-tengelyre;
(d) a sík vektorainak $\pi/2$ szögű elforgatása az origó körül;
(e) a sík vektorainak tükrözése az $y = x$ egyenesre;
(f) a tér vektorainak tükrözése az x, y-tengelyek síkjára;
(g) a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y-tengelyek síkjára;
(h) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y)$;
(j) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, -4x + 8y)$;
(k) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y + 1, x + z)$;
(l) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_3, x_2, x_4)$;
(m) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + cx_3, x_2 + cx_4, x_3, x_4)$, ahol $c \in \mathbb{R}$;
(n) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$;
(o) $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3 + 4x_4, x_4 + 5x_5)$.

7.5. Feladat. Az előző feladatban megadott φ leképezéseket adja meg $\varphi = \varphi_A$ alakban valamely A mátrixra, amennyiben ez lehetséges.

7.6. Feladat. Adjon meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén olyan φ és ψ lineáris transzformációkat, amelyek rendelkeznek a megadott tulajdonsággal:
(a) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;
(b) φ és ψ két különböző nemidentikus bijektív transzformáció;
(c) φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben;
(d) φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben.

7.7. Feladat. Tekintsük az $\mathbb{R}^n$ vektortéren megadott φ és ψ lineáris transzformációkat. Milyen „ismert” lineáris transzformációval egyenlő a $\varphi\psi$ lineáris transzformáció? Továbbá döntse el, hogy fennáll-e a $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi\psi$ és $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi\psi$ egyenlőség.

(a) $n = 2$, φ a zérótranszformáció, ψ az identikus transzformáció;
(b) $n = 2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;

(c) $n = 2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(d) $n = 2$, φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
(e) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/2$ szögű forgatás;
(f) $n = 3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára vonatkozó tükrözés;
(g) $n = 3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára való merőleges vetítés;
(h) $n = 2$, φ az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés, $\psi = \varphi_A$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
(i) $n = 2$, $\varphi = \varphi_A$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés.

7.8. Feladat. Határozza meg a $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezések alábbi lineáris kombinációit:

(a) $3\varphi + \psi$, ahol $m = n = 2$, valamint $\varphi\colon (x, y) \mapsto (x - y,\, x + 3y)$ és $\psi\colon (x, y) \mapsto (x + 3y,\, 2x - y)$;
(b) $2\varphi - 4\psi$, ahol $m = n = 3$, valamint $\varphi\colon (x, y, z) \mapsto (2x - y,\, x + y,\, 3x - 2y - z)$ és $\psi\colon (x, y, z) \mapsto (-x + 8y - 2z,\, 3y - z,\, 4y - 2z)$;
(c) $\varphi + \psi$, ahol $m = n = 2$, és φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való tükrözés;
(d) $\varphi - \psi$, ahol $m = n = 2$, és φ az y-tengelyre, ψ az x-tengelyre való merőleges vetítés;
(e) $\varphi - 2\psi$, ahol $m = n = 3$, és φ az x, y-tengelyek síkjára való tükrözés, ψ pedig az x, y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés;
(f) $2\varphi + 3\psi$, ahol $m = 3$, $n = 2$, valamint $\varphi\colon (x, y, z) \mapsto (-x + 6y,\, 2z)$, ψ pedig az x, y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés.

Szorgalmi feladatok

7.9. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^{100}$ vektortér alábbi altereinek dimenzióját, és adjon meg bázist bennük:

(a) $\{(x_1, \dots, x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 0\}$;
(b) $\{(x_1, \dots, x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \cdots = x_{99}\}$;
(c) $\{(x_1, \dots, x_{100})\colon\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{50} = x_{51} + x_{52} + \cdots + x_{100}\}$.

7.10. Feladat. Legyen U_1 és U_2 két altér a V vektortérben. Ha V dimenziója 10, U_1-é 8, U_2-é pedig 9, akkor hány dimenziós lehet az $U_1 \cap U_2$ altér?

7.11. Feladat. Adja meg az összes olyan $(n-1)$-dimenziós alteret a $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) vektortérben, amely nem tartalmazza $\mathbb{R}^n$ standard bázisának egyetlen elemét sem.

7.12. Feladat. Igazolja, hogy ha az n-dimenziós V vektortérben van olyan r és s rangú vektorrendszer, amely együttesen generálja a V vektorteret, akkor $r + s \geq n$.

7.13. Feladat. Mutassa meg, hogy ha U_1 és U_2 olyan alterek egy n-dimenziós V vektortérben, amelyekre $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ és $\dim U_1 + \dim U_2 = n$, akkor U_1

tetszőleges $e_1, e_2, \dots, e_{\dim U_1}$ bázisa és U_2 tetszőleges $f_1, f_2, \dots, f_{\dim U_2}$ bázisa esetén az $e_1, e_2, \dots, e_{\dim U_1}, f_1, f_2, \dots, f_{\dim U_2}$ vektorrendszer bázis V-ben.

7.14. Feladat. Adja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldás-altér dimenziója 3 legyen:

$$\begin{array}{rcl} x_2 + x_3 - ax_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 & = & 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Az ilyen a értékek esetén adjon meg bázist is a megoldások alterében.

7.15. Feladat. Tekintsük a következő homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 + x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Adottak a következő vektorok $\mathbb{R}^5$-ben: $u = (1,1,1,1,1)$, $v = (1,0,-2,0,1)$, $w = (0,-1,0,1,0)$, $x = (1,-2,-2,2,1)$, $y = (1,0,-1,0,0)$. Döntse el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e a fenti egyenletrendszer megoldásainak alterében:

(a) u, v, w;
(b) v, w, x;
(c) w, x, y.

7.16. Feladat. Létezik-e a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett olyan φ lineáris transzformáció, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok? Ha létezik, akkor adjon meg egy-egy ilyen transzformációt, ha pedig nem létezik, akkor indokolja, miért nem.

(a) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \emptyset$;
(b) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\underline{0}\}$;
(c) $\operatorname{Ker}\varphi \subsetneq \operatorname{Im}\varphi$;
(d) $\operatorname{Im}\varphi \subsetneq \operatorname{Ker}\varphi$;
(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

7.17. Feladat. Mennyi lehet egy $\varphi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés magjának dimenziója? Adjon meg egy-egy példát a legkisebb és a legnagyobb értékre.

7.18. Feladat. A $\varphi \in \operatorname{Hom}(U,V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy

(1) bármely négy elem képe lineárisan függő vektorrendszert alkot;
(2) bármely hat lineárisan független U-beli elem között van olyan, amelynek képe nem a zérusvektor.

Mekkora lehet U dimenziója?

7.19. Feladat. Adottak a V vektortérben az U és W alterek. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék olyan φ lineáris transzformáció, amelyre $\operatorname{Ker}\varphi = U$ és $\operatorname{Im}\varphi = W$?