6. Feladatsor – Lineáris függetlenség, rang, alterek
Eredmények

6.1. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \mathbb{R}^n$, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.

(b) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \mathbb{R}^n$.

(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor van olyan i, melyre v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

(d) A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden i-re $[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k] \neq [v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

(e) Minden $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerben van olyan lineárisan független részrendszer, amely által kifeszített vektorhalmaz éppen $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

(f) Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor nincs benne r elemű lineárisan függő részrendszer.

(g) Egy vektorrendszer bármely két olyan lineárisan független részrendszere, amely ugyanazt a vektorhalmazt feszíti ki, mint az eredeti, ugyanannyi elemből áll.

(h) Ha egy vektorrendszer minden tagja előáll 2 másik tag lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja 2.

(i) Ha egy négyzetes mátrix sorai lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, akkor a mátrix determinánsa 0.

(j) Egy nemzéró mátrix determinánsrangja r, ha van a mátrixban r rendű nemeltűnő aldetermináns.

(k) Az $\mathbb{R}^n$ vektortér U részhalmaza pontosan akkor altér $\mathbb{R}^n$-ben, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

(l) Minden n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(m) Ha egy n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldásában a kötött ismeretlenek száma r, akkor a megoldások altere megadható r elemű generátorrendszerrel.

Eredmény. (a)–(e) hamis, hamis, igaz, igaz, igaz
(f)–(j) hamis, igaz, hamis, igaz, hamis
(k)–(m) hamis, hamis, hamis

6.2. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok az $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $n = 3;\ (1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1);$
(b) $n = 3;\ (1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0);$
(c) $n = 3;\ (1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1);$
(d) $n = 4;\ (1, -2, 3, 4), (0, -3, 1, 2), (2, -4, 5, 9);$
(e) $n = 4;\ (1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1);$
(f) $n = 5;\ (0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1).$

Eredmény. lineárisan független: (b),(d),(e),(f)
lineárisan függő: (a),(c)

6.3. Feladat. Az a paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?
(a) $n = 4$; $(3, 2, 1, -4), (-2, -4, -1, 4), (a, 10, 3, -12)$;
(b) $n = 5$; $(-1, 1, 2, -3, -1), (-1, 3, 7, -8, -2), (a, -4, -11, 9, 1)$;
(c) $n = 4$; $(1, 2, 0, -1), (2, 3, 1, 3), (-2, -5, 7, a)$.

Eredmény. (a) lineárisan független $\Leftrightarrow a \neq 7$
(b) lineárisan független $\Leftrightarrow a \neq -2$
(c) mindig lineárisan független

6.4. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli megadott vektorrendszer rangját, és adjon meg benne olyan lineárisan független részrendszert, amely ugyanazt a vektorrendszert feszíti ki, mint az eredeti:
(a) $n = 3$; $(2, 0, 0), (3, -5, 0), (7, -9, -11)$;
(b) $n = 3$; $(3, -2, 1), (-12, 8, -4), (6, -5, 2), (12, -9, -4)$;
(c) $n = 4$; $(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)$;
(d) $n = 4$; $(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)$;
(e) $n = 4$; $(1, -1, 2, 0), (-1, 2, -5, -1), (0, 1, -3, -1), (2, -1, 2, 0)$, $(1, 2, -6, -2), (-3, 3, -4, 3)$.

Eredmény. (a) $r = 3$, mindhárom vektor
(b) $r = 2$, pl. első, negyedik vektor
(c) $r = 3$, mindhárom vektor
(d) $r = 3$, pl. első, második, harmadik vektor
(e) $r = 4$, pl. első, második, negyedik, hatodik vektor

6.5. Feladat. Határozza meg a következő mátrixok rangját. Adjon meg a mátrixokban a ranggal megegyező számú lineárisan független sorvektort, oszlopvektort, valamint a ranggal megegyező rendű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. Rang, ranggal megegyező méretű lineárisan független sorvektor- és oszlopvektor-rendszerek:
(a) $r = 2$, pl. első, második sor; első, második oszlop
(b) $r = 3$, pl. első, második, harmadik sor; első, második, harmadik oszlop
(c) $r = 1$, pl. első sor; első oszlop
(d) $r = 3$, minden sor és oszlop
(e) $r = 3$, pl. első, második, harmadik sor; első, második, harmadik oszlop
A ranggal megegyező rendű nemeltűnő aldeterminánsok pl. a megadott sorok és oszlopok által meghatározottak.

6.6. Feladat. A Kronecker–Capelli-tétel alkalmazásával döntse el, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszer az a paraméter mely értékeire oldható meg.

(a) $\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 + 5x_2 & = & a - 4 \end{array}$;

(b) $\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 3x_1 + 4x_3 & = & a \end{array}$;

(c) $\begin{array}{lcr} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 6x_2 - 11x_3 & = & -3 \\ 3x_1 + (a^2 - 20)x_2 + 5x_3 & = & a + 6 \end{array}$;

(d) $\begin{array}{llllcl} x_1 & -2x_2 & & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & & = & a+4 \end{array}$.

Eredmény. (a) megoldható, ha $a = 10$
(b) megoldható, ha $a = -5$
(c) megoldható, ha $a \neq 4$
(d) megoldható, ha $a \neq 3$

6.7. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi U részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1x_2 + x_3 = 0\}$;
(f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$.

Eredmény. altér: (b),(c),(f)
nem altér: (a),(d),(e)

6.8. Feladat. Adja meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterét generátorrendszer segítségével (lásd a 3.4. Feladatot):

(a) $n = 3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_3 = 0\}$;
(b) $n = 3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0\}$;
(c) $n = 4,\ U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4,\ U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

Eredmény. (a) $U = [(1, 0, 2), (0, 1, 0)]$
(b) $U = [(-1, 1 - 2)]$
(c) $U = [(-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)]$
(d) $U = [(1, -1, 0, 1)]$

6.9. Feladat. Adja meg az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével (lásd a 3.6. Feladatot):

(a) $n = 3;\ u = (1, 1, 1),\ v = (-2, 2, -2),\ w = (3, -1, 3)$;
(b) $n = 3;\ u = (-1, -1, -1),\ v = (-2, 2, -2),\ w = (0, -1, 3)$;
(c) $n = 4;\ u = (2, 2, -2, 4),\ v = (-4, -5, 6, -5)$;

(d) $n=4;\ u=(1,2,-3,4),\ v=(0,1,-1,2),\ w=(-3,0,-3,0)$;
(e) $n=5;\ u=(1,0,2,-1,-2),\ v=(-2,1,-4,3,2),\ w=(3,-1,5,-2,-3)$.

Eredmény. (a) $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1=x_3\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon -x_1+2x_2+x_3=0,\ -5x_1+3x_2+x_4=0\}$
(d) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_4=2x_2\}$
(e) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\colon -3x_1-x_2+2x_3+x_4=0,\ 2x_2+x_3+x_5=0\}$

6.10. Feladat. Ellenőrizze, hogy a megadott vektorrendszer bázist alkot-e az általa kifeszített $\mathbb{R}^n$-beli altérben (lásd a 6.2. Feladatot), és ha igen, akkor határozza meg (ha lehetséges) a v vektor koordinátasorát ebben a bázisban (lásd a 3.3. Feladatot).
(a) $n=3;\ (1,1,1),(1,1,0),\ v=(1,-1,1)$;
(b) $n=3;\ (1,-1,2),(1,2,3),\ v=(1,-1,1)$;
(c) $n=3;\ (-1,2,1),(1,2,3),(1,1,2),\ v=(1,-1,0)$;
(d) $n=4;\ (-1,1,1,0),(1,2,1,-1),(1,1,1,1),\ v=(1,2,1,2)$;
(e) $n=4;\ (1,-2,0,-1),(0,-1,-2,4),(2,-4,0,-1),(-4,8,2,4),\ v=(1,0,-1,2)$.

Eredmény. (a) bázis, nem eleme v
(b) bázis, nem eleme v
(c) nem bázis
(d) bázis, nem eleme v
(e) bázis, $(-31,-2,11,-\frac{5}{2})$

6.11. Feladat. Keressen az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterében megadott generátorrendszernek olyan részrendszerét, amely bázist alkot (lásd a 6.4. Feladatot):
(a) $n=3;\ U=[(3,-2,1),(-12,8,-4),(6,-5,1),(12,-9,4)]$;
(b) $n=3;\ U=[(1,2,5),(3,4,10),(0,0,0),(7,-2,-5)]$;
(c) $n=4;\ U=[(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$;
(d) $n=4;\ U=[(1,2,4,1),\ (-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0),\ (1,2,-2,3)]$;
(e) $n=4;\ U=[(1,-2,-4,3),(-2,4,-8,-6),(3,-6,-12,9)]$;
(f) $n=6;\ U=[(1,1,-2,0,1,2),(2,3,-2,1,0,-1),(4,5,-6,1,2,3),(-1,-2,0,-1,1,3),(-1,1,7,3,-2,-5),(-3,2,4,-1,-2,1)]$.

Eredmény. (a) pl. első, második és harmadik vektor
(b) pl. második és negyedik vektor
(c) a vektorok bázist alkotnak
(d) pl. első és második vektor
(e) minden bázis egyelemű, bármely generátorelem lehet bázis
(f) pl. első, második, ötödik és hatodik vektor

6.12. Feladat. A 6.11. Feladatban megadott $\mathbb{R}^n$-beli U alterekben keressen olyan bázist,
(i) amely lépcsős alakú (pontosabban az a mátrix lépcsős alakú, amelynek sorvektorai a bázis elemei);
(ii) amelynek egyik eleme sem skalárszorosa a lépcsős alakú bázis elemeinek;
(iii) amely $\mathbb{R}^n$ standard bázisából a lehető legtöbb elemet tartalmazza.

Eredmény. (a) (i) $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$
(ii) pl. $(5,-5,0),(3,-5,0),(7,-9,-11)$

(iii) $(1,0,0,),(0,1,0),(0,0,1)$

(b) (i) $(1,0,0),(0,2,5)$

(ii) pl. $(1,2,5),(-1,2,5)$

(iii) $(1,0,0),(0,2,5)$

(c) (i) pl. $(1,0,0,-3),(0,1,0,-2),(0,0,1,3)$

(ii) pl. $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$

(iii) pl. $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$

(d) (i) $(1,2,0,\frac{7}{3}),(0,0,1,-\frac{1}{3})$

(ii) $(1,2,1,2),(1,2,-2,3)$

(iii) $(1,2,0,\frac{7}{3}),(0,0,1,-\frac{1}{3})$

(e) (i) $(1,-2,-4,3)$

(ii) ilyen bázist nem lehet megadni ☹

(iii) $(1,-2,-4,3)$

(f) (i) $\frac{1}{2}(2,0,0,0,-17,-46),\frac{1}{6}(0,6,0,0,-1,2),\frac{1}{6}(0,0,6,0,-29,-74),\frac{1}{6}(0,0,0,6,47,116)$

(ii) $(1,1,-2,0,1,2),(2,3,-2,1,0,-1),(-1,1,7,3,-2,-5),(-3,2,4,-1,-2,1)$

(iii) $(1,1,-2,0,1,2),(2,3,-2,1,0,-1),(-1,1,7,3,-2,-5),(-3,2,4,-1,-2,1)$