6. Feladatsor – Lineáris függetlenség, rang, alterek

6.1. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \mathbb{R}^n$, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.

(b) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $[v_1, v_2, \ldots, v_k] = \mathbb{R}^n$.

(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor van olyan i, melyre v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

(d) A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden i-re $[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k] \neq [v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

(e) Minden $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerben van olyan lineárisan független részrendszer, amely által kifeszített vektorhalmaz éppen $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

(f) Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor nincs benne r elemű lineárisan függő részrendszer.

(g) Egy vektorrendszer bármely két olyan lineárisan független részrendszere, amely ugyanazt a vektorhalmazt feszíti ki, mint az eredeti, ugyanannyi elemből áll.

(h) Ha egy vektorrendszer minden tagja előáll 2 másik tag lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja 2.

(i) Ha egy négyzetes mátrix sorai lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, akkor a mátrix determinánsa 0.

(j) Egy nemzéró mátrix determinánsrangja r, ha van a mátrixban r rendű nemeltűnő aldetermináns.

(k) Az $\mathbb{R}^n$ vektortér U részhalmaza pontosan akkor altér $\mathbb{R}^n$-ben, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

(l) Minden n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(m) Ha egy n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldásában a kötött ismeretlenek száma r, akkor a megoldások altere megadható r elemű generátorrendszerrel.

6.2. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok az $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $n = 3;\ (1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1);$

(b) $n = 3;\ (1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0);$

(c) $n = 3;\ (1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1);$

(d) $n = 4;\ (1, -2, 3, 4), (0, -3, 1, 2), (2, -4, 5, 9);$

(e) $n = 4;\ (1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1);$

(f) $n = 5;\ (0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1).$

6.3. Feladat. Az a paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $n = 4;\ (3, 2, 1, -4), (-2, -4, -1, 4), (a, 10, 3, -12);$

(b) $n = 5;\ (-1, 1, 2, -3, -1), (-1, 3, 7, -8, -2), (a, -4, -11, 9, 1);$

(c) $n = 4;\ (1, 2, 0, -1), (2, 3, 1, 3), (-2, -5, 7, a).$

6.4. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli megadott vektorrendszer rangját, és adjon meg benne olyan lineárisan független részrendszert, amely ugyanazt a vektorrendszert feszíti ki, mint az eredeti:

(a) $n = 3$; $(2, 0, 0), (3, -5, 0), (7, -9, -11)$;
(b) $n = 3$; $(3, -2, 1), (-12, 8, -4), (6, -5, 2), (12, -9, -4)$;
(c) $n = 4$; $(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)$;
(d) $n = 4$; $(1, 2, 4, 1), (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0), (1, 2, -2, 3)$;
(e) $n = 4$; $(1, -1, 2, 0), (-1, 2, -5, -1), (0, 1, -3, -1), (2, -1, 2, 0)$, $(1, 2, -6, -2), (-3, 3, -4, 3)$.

6.5. Feladat. Határozza meg a következő mátrixok rangját. Adjon meg a mátrixokban a ranggal megegyező számú lineárisan független sorvektort, oszlopvektort, valamint a ranggal megegyező rendű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.6. Feladat. A Kronecker–Capelli-tétel alkalmazásával döntse el, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszer az a paraméter mely értékeire oldható meg.

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{lcc} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 + 5x_2 & = & a - 4 \end{array} ;$$

$$\text{(b)} \quad \begin{array}{lcc} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 3x_1 + 4x_3 & = & a \end{array} ;$$

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{lcc} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 6x_2 - 11x_3 & = & -3 \\ 3x_1 + (a^2 - 20)x_2 + 5x_3 & = & a + 6 \end{array} ;$$

$$\text{(d)} \quad \begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2 - 8)x_3 & & = & a + 4 \end{array} .$$

6.7. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi U részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1x_2 + x_3 = 0\}$;
(f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$.

6.8. Feladat. Adja meg az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterét generátorrendszer segítségével (lásd a 3.4. Feladatot):

(a) $n = 3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_3 = 0\}$;
(b) $n = 3,\ U = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_3 = 0,\ x_1 + x_2 = 0\}$;
(c) $n = 4,\ U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4,\ U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0,\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

6.9. Feladat. Adja meg az $\mathbb{R}^n$ vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret homogén lineáris egyenletrendszer segítségével (lásd a 3.6. Feladatot):

(a) $n = 3;\ u = (1, 1, 1),\ v = (-2, 2, -2),\ w = (3, -1, 3)$;
(b) $n = 3;\ u = (-1, -1, -1),\ v = (-2, 2, -2),\ w = (0, -1, 3)$;
(c) $n = 4;\ u = (2, 2, -2, 4),\ v = (-4, -5, 6, -5)$;
(d) $n = 4;\ u = (1, 2, -3, 4),\ v = (0, 1, -1, 2),\ w = (-3, 0, -3, 0)$;
(e) $n = 5;\ u = (1, 0, 2, -1, -2),\ v = (-2, 1, -4, 3, 2),\ w = (3, -1, 5, -2, -3)$.

6.10. Feladat. Ellenőrizze, hogy a megadott vektorrendszer bázist alkot-e az általa kifeszített $\mathbb{R}^n$-beli altérben (lásd a 6.2. Feladatot), és ha igen, akkor határozza meg (ha lehetséges) a v vektor koordinátasorát ebben a bázisban (lásd a 3.3. Feladatot).

(a) $n = 3;\ (1, 1, 1), (1, 1, 0),\ v = (1, -1, 1)$;
(b) $n = 3;\ (1, -1, 2), (1, 2, 3),\ v = (1, -1, 1)$;
(c) $n = 3;\ (-1, 2, 1), (1, 2, 3), (1, 1, 2),\ v = (1, -1, 0)$;
(d) $n = 4;\ (-1, 1, 1, 0), (1, 2, 1, -1), (1, 1, 1, 1),\ v = (1, 2, 1, 2)$;
(e) $n = 4;\ (1, -2, 0, -1), (0, -1, -2, 4), (2, -4, 0, -1), (-4, 8, 2, 4),\ v = (1, 0, -1, 2)$.

6.11. Feladat. Keressen az $\mathbb{R}^n$ vektortér U alterében megadott generátorrendszernek olyan részrendszerét, amely bázist alkot (lásd a 6.4. Feladatot):

(a) $n = 3;\ U = [(3, -2, 1), (-12, 8, -4,), (6, -5, 1), (12, -9, 4)]$;
(b) $n = 3;\ U = [(1, 2, 5), (3, 4, 10), (0, 0, 0), (7, -2, -5)]$;
(c) $n = 4;\ U = [(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)]$;
(d) $n = 4;\ U = [(1, 2, 4, 1),\ (-2, -4, -5, -3), (-1, -2, -7, 0),\ (1, 2, -2, 3)]$;
(e) $n = 4;\ U = [(1, -2, -4, 3), (-2, 4, -8, -6), (3, -6, -12, 9)]$;
(f) $n = 6;\ U = [(1, 1, -2, 0, 1, 2), (2, 3, -2, 1, 0, -1), (4, 5, -6, 1, 2, 3), (-1, -2, 0, -1, 1, 3), (-1, 1, 7, 3, -2, -5), (-3, 2, 4, -1, -2, 1)]$.

6.12. Feladat. A 6.11. Feladatban megadott $\mathbb{R}^n$-beli U alterekben keressen olyan bázist,

(i) amely lépcsős alakú (pontosabban az a mátrix lépcsős alakú, amelynek sorvektorai a bázis elemei);
(ii) amelynek egyik eleme sem skalárszorosa a lépcsős alakú bázis elemeinek;
(iii) amely $\mathbb{R}^n$ standard bázisából a lehető legtöbb elemet tartalmazza.

Szorgalmi feladatok

6.13. Feladat. Legyen $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ két tetszőleges vektorrendszer az $\mathbb{R}^n$ vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor az $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k$ vektorrendszer is az.
(b) Ha $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor u_1, $u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ is az.
(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor a $v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ vektorrendszer is az.

6.14. Feladat. Legyen u, v, w lineárisan független vektorrendszer valamely $\mathbb{R}^n$-ben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?
(a) $u + v,\ u - v,\ u - 2v + w$;
(b) $u + 2v,\ u + 2w,\ -2v + w$;
(c) $u + 3v + 2w,\ 2u + w,\ u + v + w$.

6.15. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazolja, hogy ez a vektor a nullvektor.

6.16. Feladat. A v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1, v_2, v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?

6.17. Feladat. Adja meg az a paraméter összes olyan értékét, amelyre az alábbi $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszer lineárisan függő:
(a) $n = 4$; $(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, a, 2, 1)$;
(b) $n = 4$; $(1, 0, 1, 2), (-1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 4, a)$;
(c) $n = 4$; $(1, -2, 3, 1), (0, 1, -1, 1), (2, -3, 6, 5), (-1, 1, 0, a)$;
(d) $n = 3$; $(a, 1, 0), (0, a, 1), (1, 0, a^2)$.

6.18. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékétől függően az $\mathbb{R}^{2n}$ vektortérbeli

$$(1,0,0,\ldots,0,0,a),(0,1,0,\ldots,0,a,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,a,0,\ldots,0),$$
$$(0,\ldots,0,a,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,a,0,\ldots,0,1,0),(a,0,0,\ldots,0,0,1)$$

vektorrendszer rangját.

6.19. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer esetén $r(v_1, v_2, \ldots, v_k) = r(v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_k)$.

6.20. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerek esetén $r(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k) \leq r(u_1, u_2, \ldots, u_k) + r(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

6.21. Feladat. Az a paraméter értékétől függően határozza meg a következő mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

6.22. Feladat. Egy n ismeretlenes valós lineáris egyenletrendszer bővített mártrixának van determinánsa, és ez a determináns nem 0. Mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságáról?

6.23. Feladat. Igazolja, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér nem állhat elő két valódi alterének uniójaként.

6.24. Feladat. Bizonyítsa be, az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden U, V, W alterére teljesül, hogy ha $U \subseteq W$, akkor $(U+V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)$.

6.25. Feladat. Igazolja, hogy a $\mathbb{R}^n$ vektortér összes alterének van olyan bázisa, amelyben a vektorok koordinátáinak összege azonos.

6.26. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér $X = [(1, 1, \ldots, 1)]$ és $Y = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 0\}$ altereire teljesül, hogy $X \cap Y = \{\underline{0}\}$ és $X + Y = \mathbb{R}^n$.

6.27. Feladat. Legyen a v vektor koordinátasora a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bázisban $(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Igazolja, hogy ekkor a $v, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adja meg benne a v_1 vektor koordinátáit. A koordinátasorban 1 helyett milyen koordináta esetén nem igaz ez az állítás?