# 5. feladatsor – Determinánsok – Eredmények

**5.1. Feladat.** Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
(b) Ha egy $2 \times 2$-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának skalárszorosa.
(c) Ha egy $2 \times 2$-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának skalárszorosa.
(d) Ha egy $3 \times 3$-as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának skalárszorosa.
(e) Ha egy mátrix minden eleme egész szám, és a determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
(f) Ha egy mátrix minden eleme egész szám, és a determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.
(g) Ha egy lineáris egyenletrendszer annyi egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlenje van, és az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0.
(h) Ha egy lineáris egyenletrendszer annyi egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlenje van, és az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

Tetszőleges $A, B$ mátrixok esetén

(i) ha $A, B$ nemelfajuló, akkor $A + B$ is az;
(j) ha $A, B$ elfajuló, akkor $A + B$ is az;
(k) ha $A, B$ nemelfajuló, akkor $AB$ is az;
(l) ha $A, B$ elfajuló, akkor $AB$ is az.

**Eredmény.** igaz, hamis, igaz, hamis, hamis, hamis, igaz, hamis, hamis, hamis, igaz, igaz

**5.2. Feladat.** Minél egyszerűbben határozza meg a következő determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$; (e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; (f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

**Eredmény.** (a) $-72$
(b) $-15$
(c) $-108$
(d) 32
(e) 32
(f) 180

**5.3. Feladat.** Számolja ki a következő determinánsokat:

$$
\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};\qquad
\text{(b)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix};\qquad
\text{(c)}\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix};
$$

$$
\text{(d)}\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};\qquad
\text{(e)}\ \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix};\qquad
\text{(f)}\ \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & -4 \\ -3 & -5 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.
$$

**Eredmény.** (a) 14
(b) $-70$
(c) 96
(d) $-21$
(e) $-432$
(f) $-1793$

**5.4. Feladat.** Adja meg a $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:

(a) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (1, 0, 3)$;
(b) $v_1 = (1, 8, 5)$, $v_2 = (-2, 5, 11)$, $v_3 = (5, 9, 12)$.

**Eredmény.** (a) 14
(b) 378

**5.5. Feladat.** Adja meg az $x$ értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

$$
\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8;\qquad
\text{(b)}\ \begin{vmatrix} 0 & x & -6 \\ x & -7 & -5 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.
$$

**Eredmény.** (a) $x = 2$
(b) $x = 4 \pm \sqrt{58}$

**5.6. Feladat.** Számolja ki a

$$
\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}
$$

determinánst.

**Eredmény.** 100

**5.7. Feladat.** Határozza meg $x^3$ együtthatóját az alábbi determinánsban:

$$
\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.
$$

**Eredmény.** $-4$

**5.8. Feladat.** Számítsa ki a következő determinánsokat:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & 27 & 81 \end{vmatrix}; \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}.$$

**Eredmény.** (a) $-17280$
(b) $69120$

**5.9. Feladat.** Számítsa ki a következő $n \times n$-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

**Eredmény.** $n!$

**5.10. Feladat.** A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi determinánsokat:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}; \quad (c)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Eredmény.** (a) 90
(b) 12
(c) 228

**5.11. Feladat.** A 3.2. Feladatban szereplő lineáris egyenletrendszereket, ha lehetséges, oldja meg Cramer-szabállyal.

**Eredmény.** A 3.2. Feladat (a) és (h) része oldható meg Cramer-szabállyal.

(a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$
(h) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

**5.12. Feladat.** Határozza meg a 4.9. Feladatban szereplő mátrixok inverzét az adjungáltakat tartalmazó képlet segítségével.

**Eredmény.** Lásd a 4.9. Feladat végeredményét.