

5. feladatsor – Determinánsok

5.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

- (a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
- (b) Ha egy 2×2 -es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának skalárszorosa.
- (c) Ha egy 2×2 -es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának skalárszorosa.
- (d) Ha egy 3×3 -as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának skalárszorosa.
- (e) Ha egy mátrix minden eleme egész szám, és a determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
- (f) Ha egy mátrix minden eleme egész szám, és a determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.
- (g) Ha egy lineáris egyenletrendszer annyi egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlenje van, és az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0.
- (h) Ha egy lineáris egyenletrendszer annyi egyenletet tartalmaz, mint ahány ismeretlenje van, és az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

Tetszőleges A, B mátrixok esetén

- (i) ha A, B nemelfajuló, akkor $A + B$ is az;
- (j) ha A, B elfajuló, akkor $A + B$ is az;
- (k) ha A, B nemelfajuló, akkor AB is az;
- (l) ha A, B elfajuló, akkor AB is az.

5.2. Feladat. Minél egyszerűbben határozza meg a következő determinánsokat:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; & \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \text{(c)} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}; \\
 \text{(d)} \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}; & \text{(e)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; & \text{(f)} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}.
 \end{array}$$

5.3. Feladat. Számolja ki a következő determinánsokat:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; & \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; & \text{(c)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}; \\
 \text{(d)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; & \text{(e)} \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}; & \text{(f)} \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & -4 \\ -3 & -5 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.
 \end{array}$$

5.4. Feladat. Adja meg a $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:

(a) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (1, 0, 3)$;

(b) $v_1 = (1, 8, 5)$, $v_2 = (-2, 5, 11)$, $v_3 = (5, 9, 12)$.

5.5. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8; \quad (b) \begin{vmatrix} 0 & x & -6 \\ x & -7 & -5 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

5.6. Feladat. Számolja ki a

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

determinánst.

5.7. Feladat. Határozza meg x^3 együtthatóját az alábbi determinánsban:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

5.8. Feladat. Számítsa ki a következő determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & 27 & 81 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}.$$

5.9. Feladat. Számítsa ki a következő $n \times n$ -es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

5.10. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.11. Feladat. A 3.2. Feladatban szereplő lineáris egyenletrendszereket, ha lehetséges, oldja meg Cramer-szabállyal.

5.12. Feladat. Határozza meg a 4.9. Feladatban szereplő mátrixok inverzét az adjungáltakat tartalmazó képlet segítségével.

Szorgalmi feladatok

5.13. Feladat. Legyen $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{ha } i \neq j; \\ 2, & \text{ha } i = j. \end{cases}$ Számítsa ki az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsát.

5.14. Feladat. Ha olyan nemnulla determinánsú $n \times n$ -es mátrixot akarunk felírni, amelyben minden elem 0 vagy 1, akkor legalább hány 1-t kell felhasználnunk? És mennyi a 0-k számának minimuma?

A következő feladatokban a determinánsok értékét kell kiszámolni; ha nem derül ki a determináns rendje, akkor n -edrendűnek kell tekinteni.

5.15. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

5.16. Feladat.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

5.17. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

5.18. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

5.19. Feladat. Számítsa ki a következő determinánst a determináns kifejtése nélkül:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

5.20. Feladat. A determinánsok kifejtése nélkül igazolja, hogy

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

5.21. Feladat. Egy A mátrixot *ferdén szimmetrikusnak* nevezzük, ha $A^T = -A$. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor bármely ferdén szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsa 0.

5.22. Feladat. Keresse meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 1 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n &= b \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_n^2 x_n &= b^2 \\ &\vdots \\ a_1^{n-1} x_1 + a_2^{n-1} x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n &= b^{n-1} \end{aligned}$$

(a_1, a_2, \dots, a_n páronként különböző valós számok).

5.23. Feladat. Keresse meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását:

$$\begin{aligned} ax_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + \cdots + x_n &= 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + \cdots + x_n &= 1 \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + ax_n &= 1 \end{aligned}$$

($a \in \mathbb{R}$ tetszőleges).