4. feladatsor – Mátrixok – Eredmények

4.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{1 \le i \le n} i$ minden n pozitív egészre;
(b) $\sum_{1 \ge i > n} 1 = 1$ minden n pozitív egészre;
(c) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} (i-j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} (i-j)$ minden n pozitív egészre;
(d) $\prod_{i,j=1}^{n} i = n!$ minden n pozitív egészre;
(e) $\sum_{i,j=1}^{n} ij = 2\sum_{1 \le i < j \le n} ij + \sum_{i=1}^{n} i^2$ minden n pozitív egészre;
(f) $((\lambda A)(\lambda B))^{\mathrm{T}} = \lambda^2 \left(B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\right)$ érvényes tetszőleges T test, $\lambda \in T$ skalár és $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok esetén;
(g) tetszőleges T test feletti diagonális $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok esetén az $A + B$ és az AB mátrix is diagonális;
(h) tetszőleges T test feletti szimmetrikus $A, B \in T^{n \times n}$ mátrixok esetén az $A + B$ és az AB mátrix is szimmetrikus.

Eredmény. igaz, hamis, hamis, hamis, igaz, igaz, igaz, hamis

4.2. Feladat. Egy üzemben háromféle müzlit gyártanak, csokoládésat, mogyorósat és kókuszosat, a következő alapanyagok felhasználásával: zabpehely, csokoládé, mogyoró és kókuszforgács. A csokoládés müzlihez 4 egység zabpehelyre, 3 egység csokoládéra és 1 egység mogyoróra van szükség. A mogyorós müzli 3 egység zabpelyhet, 2 egység csokoládét és 4 egység mogyorót tartalmaz, a kókuszos pedig 3 egység zabpelyhet, 1 egység csokoládét és 3 egység kókuszforgácsot.

(a) Határozza meg a termelési mátrixot.
(b) Adja meg, hogy mennyi alapanyag kell az egyes napokra, ha a következő megrendeléseket kapta az üzem egy adott héten a csokoládés (cs), mogyorós (m) és kókuszos (k) müzlire

$$\begin{array}{c} \\ h \\ k \\ sz \\ cs \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} cs & m & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(c) Mennyibe kerül az egyes müzlifajták előállítása, ha az alapanyagok egységnyi árai a követekezők: zabpehely 400 Ft, csokoládé 100 Ft, mogyoró 60 Ft, kókuszforgács 80 Ft?

Eredmény. (a) $$\begin{array}{c} \\ cs \\ m \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & cs & m & k \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} z & cs & m & k \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ k \\ sz \\ cs \\ p \end{array} & \begin{pmatrix} 18 & 11 & 6 & 9 \\ 27 & 13 & 16 & 15 \\ 21 & 14 & 11 & 3 \\ 27 & 13 & 16 & 15 \\ 41 & 20 & 14 & 24 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) cs: 1960, m: 1640, k: 1540

4.3. Feladat. Egy étteremben háromféle salátát árulnak, babsalátát, franciasalátát és tésztasalátát, a következő alapanyagokból előállítva: bab, majonéz, tejföl, borsó, répa, tészta. Egy adag babsalátához 5 egység babra, 3 egység majonézre és 1 egység tejfölre van szükség. A franciasalátához 4 egység majonézt, 2 egység tejfölt, 3 egység borsót és 4 egység répát használnak fel. A tésztasaláta elkészítéséhez pedig 1 egység bab, 5 egység majonéz, 2 egység tejföl, 1 egység borsó és 6 egység tészta kell.

(a) Határozza meg a termelési mátrixot.

(b) Mennyi alapanyagra van szükség egy napra, ha a tapasztalatok alapján reggelire, ebédre és vacsorára a következő mátrixnak megfelelő adag saláta szokott elfogyni:
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} b & f & t \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ e \\ v \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 18 & 20 \\ 5 & 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array}?$$

(c) Mennyibe kerül az egyes salátákból egy adag, ha az alapanyagok egységnyi ára: bab 100 Ft, majonéz 150 Ft, tejföl 50 Ft, borsó 60 Ft, répa 20 Ft, tészta 80 Ft?

Eredmény. (a)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} ba & m & te & bo & re & tsz \end{array} \\ \begin{array}{c} b \\ f \\ t \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} ba & m & te & bo & re & tsz \end{array} \\ \begin{array}{c} r \\ e \\ v \end{array} & \begin{pmatrix} 27 & 53 & 19 & 23 & 40 & 30 \\ 70 & 202 & 46 & 74 & 72 & 78 \\ 34 & 112 & 31 & 48 & 80 & 54 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) b: 605, f: 960, t: 1390

4.4. Feladat. Számítsa ki az

(a) $A+B,\ 3A,\ B^{\mathrm{T}},\ BC,\ AC,\ D(B+C^{\mathrm{T}})$;

(b) $A+C^{\mathrm{T}},\ 3B,\ DA,\ B^{\mathrm{T}}D,\ (A^{\mathrm{T}}+C)D$;

(c) $C^{\mathrm{T}}+B,\ 4C,\ DB,\ A^{\mathrm{T}}D,\ D(C^{\mathrm{T}}+A)$

mátrixokat a következő valós mátrixokra:
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. (a) $A+B=\begin{pmatrix}2&3&-3\\4&-1&4\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}3&0&-6\\6&-3&9\end{pmatrix}$, $B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $BC=\begin{pmatrix}4&0\\2&0\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}1&10\\1&-6\end{pmatrix}$, $D(B+C^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}6&-8&-5\\12&-6&-9\end{pmatrix}$;

(b) $A+C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&-2\\4&-3&-1\end{pmatrix}$, $3B=\begin{pmatrix}3&9&-3\\6&0&3\end{pmatrix}$, $DA=\begin{pmatrix}3&-2&8\\6&-3&9\end{pmatrix}$,

$B^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix}-1&8\\-3&6\\1&1\end{pmatrix}$, $(A^{\mathrm{T}}+C)D=\begin{pmatrix}-2&16\\-1&-7\\2&-7\end{pmatrix}$;

(c) $C^{\mathrm{T}}+B=\begin{pmatrix}2&4&-1\\4&-2&-3\end{pmatrix}$, $4C=\begin{pmatrix}4&8\\4&-8\\0&-16\end{pmatrix}$, $DB=\begin{pmatrix}3&-3&3\\6&0&3\end{pmatrix}$,

$A^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix}-1&8\\0&-3\\2&5\end{pmatrix}$, $D(C^{\mathrm{T}}+A)=\begin{pmatrix}6&-7&0\\12&-9&-3\end{pmatrix}$.

4.5. Feladat. Számítsa ki az
(a) AB, BC, FB^{T}, G^2, $(A+B^{\mathrm{T}})D$;
(b) BA, DC, BG, $D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}$, $AD+B^{\mathrm{T}}D$;
(c) $B+A^{\mathrm{T}}$, CB, CD, $F^{\mathrm{T}}A$, $(A+B)C$.
mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő valós mátrixokra:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-2&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&0\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

Eredmény. (a) $AB=\begin{pmatrix}-2&1\\6&9\end{pmatrix}$, BC nem létezik, $FB^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5&1&7\\3&3&5\end{pmatrix}$,

$G^2=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\1&1&3\\0&6&2\end{pmatrix}$, $(A+B^{\mathrm{T}})D=\begin{pmatrix}1\\16\end{pmatrix}$;

(b) $BA=\begin{pmatrix}3&-2&5\\0&-4&4\\4&-4&8\end{pmatrix}$, $DC=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&0\\2&4&0\end{pmatrix}$, BG nem létezik, $D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1\end{pmatrix}$, $AD+B^{\mathrm{T}}D=\begin{pmatrix}1\\16\end{pmatrix}$;

(c) $B+A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $F^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $(A+B)C$ nem létezik.

4.6. Feladat. Számítsa ki az f polinom helyettesítési értékét az A helyen, ha

(a) $f(x) = x^2 + x + 1,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(b) $f(x) = x^2 - x - 1,\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(c) $f(x) = x^2 - 5x + 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$;

(d) $f(x) = x^2 + 3x - 4,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Eredmény. (a) $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(b) $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(c) $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$;

(d) $f(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -12 \\ 26 & 12 & -2 \\ 22 & 12 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

4.7. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Adja meg az összes olyan $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, amely A-val felcserélhető azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

Eredmény.

$$\begin{pmatrix} -2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbb{R}$$

4.8. Feladat. Döntse el, hogy teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $n \times n$-es valós A, B mátrixok és k, m pozitív egészek esetén, és döntését röviden indokolja:

(a) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$;

(b) $A^k A^m = A^{k+m}$;

(c) $(A^k)^m = A^{km}$;

(d) $(AB)^k = A^k B^k$.

Eredmény. nem, igen, igen, nem

4.9. Feladat. Határozza meg a következő mátrixok inverzét:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eredmény. A determinánsok rendre: $2, -1, 1, -1, -16, -102, -5$.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -17 & 16 & -9 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -15 & 5 & 8 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $-\frac{1}{102} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -26 & 18 & -40 \\ 24 & 2 & -21 & 7 \\ 0 & 34 & 0 & -34 \\ -12 & -18 & -15 & 39 \end{pmatrix}$

(g) $-\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & -1 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

4.10. Feladat. Oldja meg a következő mátrixegyenleteket:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(e) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Eredmény. (a) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$