4. feladatsor – Mátrixok

4.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{1\leq i\leq n} i$
(b) $\sum_{1\geq i>n} 1 = 1$ minden n pozitív egészre;
(c) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(i-j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}(i-j)$ minden n pozitív egészre;
(d) $\prod_{i,j=1}^{n} i = n!$ minden n pozitív egészre;
(e) $\sum_{i,j=1}^{n} ij = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} ij + \sum_{i=1}^{n} i^2$ minden n pozitív egészre;
(f) $((cA)(cB))^{\mathrm{T}} = c^2\left(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right)$ érvényes tetszőleges $c\in\mathbb{R}$ skalár és $A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén;
(g) tetszőleges diagonális $A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is diagonális;
(h) tetszőleges szimmetrikus $A, B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is szimmetrikus.

4.2. Feladat. Egy üzemben háromféle müzlit gyártanak, csokoládésat, mogyorósat és kókuszosat, a következő alapanyagok felhasználásával: zabpehely, csokoládé, mogyoró és kókuszforgács. A csokoládés müzlihez 4 egység zabpehelyre, 3 egység csokoládéra és 1 egység mogyoróra van szükség. A mogyorós müzli 3 egység zabpelyhet, 2 egység csokoládét és 4 egység mogyorót tartalmaz, a kókuszos pedig 3 egység zabpelyhet, 1 egység csokoládét és 3 egység kókuszforgácsot.

(a) Határozza meg a termelési mátrixot.
(b) Adja meg, hogy mennyi alapanyag kell az egyes napokra, ha a következő megrendeléseket kapta az üzem egy adott héten a csokoládés (cs), mogyorós (m) és kókuszos (k) müzlire

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} cs & m & k \end{array} \\ \begin{array}{c} h \\ k \\ sz \\ cs \\ p \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(c) Mennyibe kerül az egyes müzlifajták előállítása, ha az alapanyagok egységnyi árai a következők: zabpehely 400 Ft, csokoládé 100 Ft, mogyoró 60 Ft, kókuszforgács 80 Ft?

4.3. Feladat. Egy étteremben háromféle salátát árulnak, babsalátát, franciasalátát és tésztasalátát, a következő alapanyagokból előállítva: bab, majonéz, tejföl, borsó, répa, tészta. Egy adag babsalátához 5 egység babra, 3 egység majonézre és 1 egység tejfölre van szükség. A franciasalátához 4 egység majonézt, 2 egység tejfölt, 3 egység borsót és 4 egység répát használnak fel. A tésztasaláta elkészítéséhez pedig 1 egység bab, 5 egység majonéz, 2 egység tejföl, 1 egység borsó és 6 egység tészta kell.

(a) Határozza meg a termelési mátrixot.

(b) Mennyi alapanyagra van szükség egy napra, ha a tapasztalatok alapján reggelire, ebédre és vacsorára a következő mátrixnak megfelelő adag saláta szokott elfogyni:

$$\begin{array}{c} \\ r \\ e \\ v \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b & f & t \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 18 & 20 \\ 5 & 13 & 9 \end{pmatrix} \end{array}?$$

(c) Mennyibe kerül az egyes salátákból egy adag, ha az alapanyagok egységnyi ára: bab 100 Ft, majonéz 150 Ft, tejföl 50 Ft, borsó 60 Ft, répa 20 Ft, tészta 80 Ft?

4.4. Feladat. Számítsa ki az

(a) $A+B,\ 3A,\ B^{\mathrm{T}},\ BC,\ AC,\ D(B+C^{\mathrm{T}})$;
(b) $A+C^{\mathrm{T}},\ 3B,\ DA,\ B^{\mathrm{T}}D,\ (A^{\mathrm{T}}+C)D$;
(c) $C^{\mathrm{T}}+B,\ 4C,\ DB,\ A^{\mathrm{T}}D,\ D(C^{\mathrm{T}}+A)$

mátrixokat a következő mátrixokra:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5. Feladat. Számítsa ki az

(a) $AB,\ BC,\ FB^{\mathrm{T}},\ G^2,\ (A+B^{\mathrm{T}})D$;
(b) $BA,\ DC,\ BG,\ D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\ AD+B^{\mathrm{T}}D$;
(c) $B+A^{\mathrm{T}},\ CB,\ CD,\ F^{\mathrm{T}}A,\ (A+B)C$.

mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő mátrixokra:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Feladat. Számítsa ki az f polinom helyettesítési értékét az A helyen, ha

(a) $f(x)=x^2+x+1,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $f(x)=x^2-x-1,\ A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$;

(c) $f(x)=x^2-5x+3,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$;

(d) $f(x)=x^2+3x-4,\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$.

4.7. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Adja meg az összes olyan $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, amely A-val felcserélhető, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

4.8. Feladat. Döntse el, hogy teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $n \times n$-es A, B mátrixok és k, m pozitív egészek esetén, és döntését röviden indokolja:

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
(b) $A^k A^m = A^{k+m}$;
(c) $(A^k)^m = A^{km}$;
(d) $(AB)^k = A^k B^k$.

4.9. Feladat. Határozza meg a következő mátrixok inverzét:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(g) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.10. Feladat. Oldja meg a következő mátrixegyenleteket:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(e) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.11. Feladat. Határozza meg a következő mátrixok LU-faktorizációját:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -3 & -13 \\ 4 & 9 & 17 & 16 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 8 & 7 \\ 6 & -5 & 14 \\ -6 & 9 & -2 \end{pmatrix}$.

Szorgalmi feladatok

4.12. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix, és legyenek i, j olyan pozitív egészek, amelyekre $i \leq n,\ j \leq k$. Adjon meg olyan P, illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat az az 1×1-es mátrix, melynek egyetlen eleme az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

4.13. Feladat. Határozza meg a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre, és minden további számolás nélkül adja meg a mátrix inverzét is.

4.14. Feladat. Határozza meg a $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre, és minden további számolás nélkül adja meg a mátrix inverzét is.

4.15. Feladat. Határozza meg az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre.

4.16. Feladat. Határozza meg az $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre, valamint a mátrix inverzét is.

4.17. Feladat. Határozza meg az összes olyan 2×2-es mátrixot, melynek négyzete a nullmátrix.

4.18. Feladat. Az $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *nyoma* (trace) a főátlóban lévő elemek összege: $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Igazolja, hogy bármely A mátrixra $\mathrm{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right) \geq 0$, és egyenlőség csak $A = \underline{0}$ esetén áll fenn.

4.19. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra
(a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;
(b) $AB - BA \neq E$.

4.20. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $Q, R, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra teljesül, hogy ha $RQ = E$, akkor $\mathrm{tr}(QAR) = \mathrm{tr}(A)$.

4.21. Feladat. Az exponenciális függvényre ismert a következő képlet:

$$\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt $e \sim 2.718\,281$ a természetes logaritmus alapszáma, a végtelen összeget pedig elég intuitívan értelmezni. Számítsa ki az $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mátrixot.

4.22. Feladat. Számítsa ki az alábbi $n \times n$-es mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4.23. Feladat. Határozza meg a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es mátrix inverzét.

4.24. Feladat. Oldja meg az $AX^{-1}B - C = AX^{-1}$ mátrixegyenletet, ahol A, B, C az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.25. Feladat. Bizonyítsa be tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén a következőt: ha $AB + A + B = \underline{0}$, akkor $AB = BA$.