3. Feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek – Eredmények

3.1. Feladat. Legyen adott egy m egyenletből álló n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $n > m$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(b) Ha $n = m$, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
(c) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor $n = m$.
(d) Ha $n < m$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(e) Ha $m < n$, akkor az egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.
(f) Tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén az $\frac{1}{2}u$ vektor az u és a v vektorok lineáris kombinációja.
(g) Az $[u, v]$ halmaz tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén végtelen.
(h) Nincs olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek egyetlen megoldása van.
(i) Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldásai éppen a $(2,2,2) + t(1,1,1)$ $(t \in \mathbb{R})$ vektorok.

Eredmény. hamis, hamis, hamis, hamis, igaz, igaz, hamis, hamis, igaz

3.2. Feladat. Oldja meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Az eredményt általános megoldás formájában adja meg.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 8 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array};$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 11x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array};$$

(h) $$\begin{array}{rcrcrcr} 18x_1 & + & 9x_2 & + & 23x_3 & = & 50 \\ 17x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & = & 42 \\ 21x_1 & + & 20x_2 & - & 10x_3 & = & 31 \end{array}.$$

Eredmény. (a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$
(b) nincs megoldás
(c) $x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4$
$x_3 = 4 + x_4$
(d) nincs megoldás
(e) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$
(f) $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5$
$x_3 = 3 - 4x_5$
$x_4 = 0$
(g) $x_1 = 4 - 7x_4$
$x_3 = 2 - 4x_4$
(h) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

3.3. Feladat. Döntse el az alábbi vektorok esetén, hogy a v vektor előáll-e a megadott v_1, v_2, illetve v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként?

(a) $v = (1, -1, 1),\ \ v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (0, 0, 1);$
(b) $v = (1, 1, 1),\ \ v_1 = (1, -1, 2),\ v_2 = (1, 0, 1);$
(c) $v = (1, 2, 1),\ \ v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 1);$
(d) $v = (1, 2, 1),\ \ v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (2, 1, 0);$
(e) $v = (1, 0, -2, 10),\ \ v_1 = (1, -2, 0, 4),\ v_2 = (-2, 5, -1, -5);$
(f) $v = (2, -7, -1, -10),\ \ v_1 = (1, -3, 2, 1),\ v_2 = (0, 1, 2, 4),\ v_3 = (1, -3, 3, 4);$
(g) $v = (3, -5, 6, 8, 6),\ \ v_1 = (1, -1, 0, 4, 2),\ v_2 = (2, -1, -3, 10, 5).$

Eredmény. előáll: (a), (c), (e)
nem áll elő: (b), (d), (f), (g)

3.4. Feladat. Adja meg a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak halmazát vektorok lineáris kombinációjaként.

(a) $2x_1 - x_3 = 0;$

(b) $$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_4 & = & 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(f)}\quad \begin{array}{rcl} x_1+3x_2+3x_3-5x_5 &=& 0\\ 2x_2-x_3+3x_4+2x_5 &=& 0\ .\\ 2x_1+2x_2+4x_3+6x_4-6x_5 &=& 0 \end{array}$$

Eredmény. (a) $t_1(1,0,2)+t_2(0,1,0)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$
(b) $t(-1,1-2),\ (t\in\mathbb{R})$
(c) $t_1(-2,-1,1,0)+t_2(-1,-1,0,1)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$
(d) $t_1(-2,7,3,0)+t_2(1,-1,0,1)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$
(e) $t(-5,-1,1,1)$ $(t\in\mathbb{R})$
(f) $t_1(-9,0,3,1,0)+t_2(-1,0,2,0,1)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$

3.5. Feladat. Adja meg a 3.2. Feladatban szereplő lineáris egyenletrendszerek megoldásainak halmazát vektorok lineáris kombinációja segítségével.

Eredmény. (a) $(2,-3,-1)$
(b) $\emptyset$
(c) $(17,0,4,0)+t_1(-3,1,0,0)+t_2(3,0,1,1)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$
(d) $\emptyset$
(e) $(1,2,-2)$
(f) $(-\frac{1}{2},0,3,0,0)+t_1(1,2,0,0,0)+t_2(1,0,-8,0,2)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$
(g) $(4,0,2,0)+t_1(0,1,0,0)+t_2(-7,0,-4,1)$ $(t_1,t_2\in\mathbb{R})$
(h) $(1,1,1)$

3.6. Feladat. Keressen olyan homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásvektorai éppen a v_1,v_2, illetve a v_1,v_2,v_3 vektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorok:
(a) $v_1=(1,1,1),\ v_2=(1,-1,5)$;
(b) $v_1=(2,2,-4),\ v_2=(1,0,3)$;
(c) $v_1=(1,1,1),\ v_2=(-2,2,-2),\ v_3=(3,-1,3)$;
(d) $v_1=(1,1,1),\ v_2=(-2,2,-2),\ v_3=(0,-1,3)$;
(e) $v_1=(2,2,-2,4),\ v_2=(-4,-5,6,-5)$;
(f) $v_1=(1,2,-3,4),\ v_2=(0,1,-1,2),\ v_3=(-3,0,-3,0)$;
(g) $v_1=(1,0,2,-1,-2),\ v_2=(-2,1,-4,3,2),\ v_3=(3,-1,5,-2,-3)$.

Eredmény. (a) $-3x_1+2x_2+x_3=0$

(b) $-3x_1+5x_2+x_3=0$

(c) $x_1-x_3=0$

(d) $0x_1=0$

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{rcl} -x_1+2x_2+x_3 &=& 0\\ -5x_1+3x_2+x_4 &=& 0 \end{array}$$

(f) $2x_2-x_4=0$

$$\text{(g)}\quad \begin{array}{rcl} -3x_1-x_2+2x_3+x_4 &=& 0\\ 2x_2+x_3+x_5 &=& 0 \end{array}$$

3.7. Feladat. Legyen egy gazdaság két szektorra bontva: I. szektor–Termelés, II. szektor–Szolgáltatás. Minden évben az I. szektor a termékeinek 80%-át átadja (fizetség ellenében) a II. szektornak, a többit maga használja fel, míg a II. szektor kimenetének 70%-a kerül az I. szektorhoz, a többi a szektoron belül kerül felhasználásra. Keresse meg azokat az egyensúlyi árakat, amelyeknél a szektorok kiadásai megegyeznek a bevételeikkel.

Eredmény. Legyen az I. szektor bevétele: x_1, a II. szektor bevétele: x_2, ekkor az egyensúlyi ár: $x_1 = \frac{7}{8}x_2$.

3.8. Feladat. Tekintsünk egy gazdaságot, amely három szektorra bomlik: I. szektor–Energia, II. szektor–Termelés, III. szektor–Szolgáltatás. Az I. szektor a termelésének 80%-át adja el a II. szektornak és 10%-át a III. szektornak, a többi a szektoron belül marad. A II. szektor az általa előállított termékek 10%-át adja el az I. szektornak, 80%-át a III. szektornak, a többit használja fel saját maga. A III. szektor 20%-ot ad át az I. és 40%-ot a II. szektornak, a többit a szektoron belül hasznosítja.

(a) Írja fel azt a lineáris egyenletrendszert, amely olyan árakhoz vezet, ahol a kiadások minden szektorban megegyeznek a bevételekkel.

(b) Határozza meg azon egyensúlyi árakat, ahol a III. szektor teljes bevétele 100 egység.

Eredmény. Jelölje az egyes szektorok bevételeit rendre x_1, x_2, x_3.

(a)
$$\begin{aligned} 0,9x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 &= 0 \\ -0,8x_1 + 0,9x_2 - 0,4x_3 &= 0 \\ -0,1x_1 - 0,8x_2 + 0,6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b) $x_1 \approx 30,14, \quad x_2 \approx 71,23, \quad x_3 = 100$