3. Feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek

3.1. Feladat. Legyen adott egy m egyenletből álló n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $n > m$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(b) Ha $n = m$, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
(c) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, akkor $n = m$.
(d) Ha $n < m$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(e) Ha $m < n$, akkor az egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.
(f) Tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén az $\frac{1}{2}u$ vektor az u és a v vektorok lineáris kombinációja.
(g) Az $[u, v]$ halmaz tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén végtelen.
(h) Nincs olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek egyetlen megoldása van.
(i) Van olyan homogén lineáris egyenletrendszer, amelynek megoldásai éppen a $(2, 2, 2) + t(1, 1, 1)$ $(t \in \mathbb{R})$ vektorok.

3.2. Feladat. Oldja meg Gauss-eliminációval az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Az eredményt általános megoldás formájában adja meg.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & - & 4x_4 & = & 8 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array};$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array};$$

(g) $$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_3 & + & 11x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(h)}\quad \begin{array}{rcrcrcl} 18x_1 & + & 9x_2 & + & 23x_3 & = & 50 \\ 17x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & = & 42 \\ 21x_1 & + & 20x_2 & - & 10x_3 & = & 31 \end{array}.$$

3.3. Feladat. Döntse el az alábbi vektorok esetén, hogy a v vektor előáll-e a megadott v_1, v_2, illetve v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként?

(a) $v = (1, -1, 1),\ \ v_1 = (1, -1, 0),\ v_2 = (0, 0, 1)$;
(b) $v = (1, 1, 1),\ \ v_1 = (1, -1, 2),\ v_2 = (1, 0, 1)$;
(c) $v = (1, 2, 1),\ \ v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (0, 1, 1),\ v_3 = (1, 0, 1)$;
(d) $v = (1, 2, 1),\ \ v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (2, 1, 0)$;
(e) $v = (1, 0, -2, 10),\ \ v_1 = (1, -2, 0, 4),\ v_2 = (-2, 5, -1, -5)$;
(f) $v = (2, -7, -1, -10),\ \ v_1 = (1, -3, 2, 1),\ v_2 = (0, 1, 2, 4),\ v_3 = (1, -3, 3, 4)$;
(g) $v = (3, -5, 6, 8, 6),\ \ v_1 = (1, -1, 0, 4, 2),\ v_2 = (2, -1, -3, 10, 5)$.

3.4. Feladat. Adja meg a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak halmazát vektorok lineáris kombinációjaként.

(a) $2x_1 - x_3 = 0$;

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(d)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_4 & = & 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(f)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_5 & = & 0 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 6x_5 & = & 0 \end{array}.$$

3.5. Feladat. Adja meg a 3.2. Feladatban szereplő lineáris egyenletrendszerek megoldásainak halmazát vektorok lineáris kombinációja segítségével.

3.6. Feladat. Keressen olyan homogén lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásvektorai éppen a v_1, v_2, illetve a v_1, v_2, v_3 vektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorok:

(a) $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 5)$;
(b) $v_1 = (2, 2, -4),\ v_2 = (1, 0, 3)$;
(c) $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (-2, 2, -2),\ v_3 = (3, -1, 3)$;
(d) $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (-2, 2, -2),\ v_3 = (0, -1, 3)$;
(e) $v_1 = (2, 2, -2, 4),\ v_2 = (-4, -5, 6, -5)$;
(f) $v_1 = (1, 2, -3, 4),\ v_2 = (0, 1, -1, 2),\ v_3 = (-3, 0, -3, 0)$;
(g) $v_1 = (1, 0, 2, -1, -2),\ v_2 = (-2, 1, -4, 3, 2),\ v_3 = (3, -1, 5, -2, -3)$.

3.7. Feladat. Legyen egy gazdaság két szektorra bontva: I. szektor–Termelés, II. szektor–Szolgáltatás. Minden évben az I. szektor a termékeinek 80%-át átadja (fizetség ellenében) a II. szektornak, a többit maga használja fel, míg a II. szektor kimenetének 70%-a kerül az I. szektorhoz, a többi a szektoron belül kerül felhasználásra. Keresse meg azokat az egyensúlyi árakat, amelyeknél a szektorok kiadásai megegyeznek a bevételeikkel.

3.8. Feladat. Tekintsünk egy gazdaságot, amely három szektorra bomlik: I. szektor–Energia, II. szektor–Termelés, III. szektor–Szolgáltatás. Az I. szektor a termelésének 80%-át adja el a II. szektornak és 10%-át a III. szektornak, a többi a szektoron belül marad. A II. szektor az általa előállított termékek 10%-át adja el az I. szektornak, 80%-át a III. szektornak, a többit használja fel saját maga. A III. szektor 20%-ot ad át az I. és 40%-ot a II. szektornak, a többit a szektoron belül hasznosítja.

(a) Írja fel azt a lineáris egyenletrendszert, amely olyan árakhoz vezet, ahol a kiadások minden szektorban megegyeznek a bevételekkel.
(b) Határozza meg azon egyensúlyi árakat, ahol a III. szektor teljes bevétele 100 egység.

Szorgalmi feladatok

3.9. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b, c valós paraméterek:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & c \end{array}.$$

3.10. Feladat. Oldja meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 & = & 1 \\ x_1 + (1-a)x_3 + (a-1)x_4 & = & 2 \\ x_1 - ax_3 + (a-2)x_4 & = & 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 & = & 3a-1 \end{array}.$$

3.11. Feladat. Oldja meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & -2x_2 & & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & & = & a+4 \end{array}.$$

3.12. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a valós paraméter:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}.$$

3.13. Feladat. Legyen u, v, w három vektor a térben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

3.14. Feladat. Egyszer volt, hol nem volt, volt egyszer hét kicsi kecske. A mamájuk hozott nekik 2,1 liter tejecskét, és szétosztotta a hét kicsi bögrécskébe, de nem sikerült igazságosan elosztania. Az első kicsi kecske így szólt: „Én annyira szeretem a testvérkéimet, hogy inkább lemondok a tejecskémről a javukra.” Azzal egyenlően szét is osztotta a tejecskéjét a hat testvérkéje között. A második kicsi kecske is nagyon jószívű volt, ő is szétosztotta a bögrécskéjében lévő tejecskét hat testvérkéje között. Így tett sorban a többi kicsi kecske is. És lássatok csudát! A végén minden kicsi bögrécskében ugyanannyi tejecske volt, mint a legelején. Azaz mennyi?