2. Feladatsor – Koordinátageometria síkban és térben
Eredmények

2.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha v_1, v_2, v_3 tetszőleges vektorok a síkban, akkor a sík összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(b) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a síkban, melyek közül kettő nincs egy egyenesben, akkor a sík összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(c) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek közül semelyik kettő nincs egy egyenesben, akkor a tér összes vektora előáll $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(d) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek nincsenek egy síkban, akkor a tér összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(e) A síkban az $x + y = 2$ és $2x + 2y = 2$ egyenesek egybe esnek.
(f) A térben az $x - y + z = 2$ és $-x + y + z = -2$ síkok nem párhuzamosak.

Eredmény. hamis, igaz, hamis, igaz, hamis, igaz

2.2. Feladat. Döntse el, hogy a sík, illetve tér alábbi vektorai egy egyenesben, illetve egy síkban vannak-e:

(a) $(2, 1), (0, 0), (-2, -1) \in \mathbb{R}^2$;
(b) $(1, -3), (2, 2), (0, 5) \in \mathbb{R}^2$;
(c) $(1, 1, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2), (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$;
(d) $(-1, 3, 1), (5, 5, 3), (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$;
(e) $(1, -1, 2), (1, 1, -1), (2, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$;
(f) $(-3, 2, -1), (3, -1, 3), (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Eredmény. igen, nem, igen, igen, nem, nem

2.3. Feladat. Igazolja, hogy a $v_1 = (0, 7, 2),\ v_2 = (1, 6, 1),\ v_3 = (2, 5, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektorok nincsenek egy síkban, és fejezze ki az

(a) $(1, -1, 0)$;
(b) $(1, 0, 0)$;
(c) $(-3, 3, 2)$

vektort $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ alakban.

Eredmény. (a) $c_1 = 0$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$
(b) $c_1 = -\frac{1}{7}$, $c_2 = -\frac{3}{7}$, $c_3 = \frac{5}{7}$
(c) $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = -1$

2.4. Feladat. Határozza meg a paraméteres alakban megadott (síkbeli) egyenes egy egyenletét, és az egyenlettel megadott egyenes egy paraméteres alakját:

(a) $x = 7 + 5t,\ y = 8 - 4t\ (t \in \mathbb{R})$;
(b) $x = 1 + t,\ y = 2 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$;
(c) $x = -t,\ y = -t\ (t \in \mathbb{R})$;
(d) $5x - 3y = 1$;

(e) $-2x + 4y = 3$;
(f) $3x + 2y = 5$.

Eredmény. (a) $4x + 5y = 68$
(b) $2x - y = 0$
(c) $x = y$
(d) $x = -1 + 3t,\ y = -2 + 5t\ (t \in \mathbb{R})$
(e) $x = -\frac{1}{2} + 3t,\ y = \frac{1}{2} + t\ (t \in \mathbb{R})$
(f) $x = 1 - 2t,\ y = 1 + 3t\ (t \in \mathbb{R})$

2.5. Feladat. Határozza meg a paraméteres alakban megadott sík egy egyenletét, és az egyenlettel megadott sík egy paraméteres alakját:
(a) $x = 2 + t_1 - t_2,\ y = -1 + 3t_2,\ z = 1 + t_1 - 2t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(b) $x = 2 + t_1,\ y = 2 - t_1 + 2t_2,\ z = -1 + t_1 + t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(c) $x = -1 - t_1 + t_2,\ y = 1 + 4t_1 - 2t_2,\ z = t_1 + t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(d) $x + y + z = 6$;
(e) $-x + 2y - z = 0$;
(f) $2x - 3y + z = 5$.

Eredmény. (a) $-3x + y + 3z = -4$
(b) $3x + y - 2z = 10$
(c) $-3x - y + z = 2$
(d) $x = 1 + t_1 + t_2,\ y = 2 - t_1,\ z = 3 - t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$
(e) $x = t_1,\ y = t_2,\ z = -t_1 + 2t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$
(f) $x = 1 + t_1,\ y = -1 + t_2,\ z = -2t_1 + 3t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$

2.6. Feladat. Határozza meg
(a) a síkban az $x - y = 0$ és az $x - 3y = 2$ egyenes metszéspontját;
(b) a síkban a $2x + y = 1$ és az $x + y = 2$ egyenes metszéspontját;
(c) a térben az $x - y - z = 0$ sík és az $x = 2,\ y = t,\ z = t\ (t \in \mathbb{R})$ egyenes metszéspontját;
(d) a térben az $x + y - z = -1$ sík és az $x = 2 - t,\ y = 1 + t,\ z = 2t\ (t \in \mathbb{R})$ egyenes metszéspontját.

Eredmény. (a) $(-1, -1)$
(b) $(1, 3)$
(c) $(2, 1, 1)$
(d) $(0, 3, 4)$

2.7. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi e egyenes és P pont esetén a P pont e-re vonatkozó tükörképét:
(a) $e\colon x = 0,\ P = (-2, 3)$;
(b) $e\colon x - 3y = 0,\ P = (7, -1)$;
(c) $e\colon x - y = 0,\ P = (-4, 1)$;
(d) $e\colon 2x + y = 0,\ P = (3, 4)$.

Eredmény. (a) $P' = (2, 3)$;
(b) $P' = (5, 5)$;
(c) $P' = (1, -4)$;
(d) $P' = (-5, 0)$.

2.8. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi α szög és P pont esetén a P pont képét az origó körüli α szögű elforgatás mellett:

(a) $\alpha = \frac{\pi}{3},\ P = (-1, 0)$;
(b) $\alpha = -\frac{3\pi}{4},\ P = (-1, -2)$;
(c) $\alpha = \frac{3\pi}{4},\ P = (1, -1)$;
(d) $\alpha = -\frac{2\pi}{3},\ P = (3, 4)$.

Eredmény. (a) $P' = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$;
(b) $P' = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$;
(c) $P' = (0, \sqrt{2})$;
(d) $P' = (-\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}, -2 - \frac{3\sqrt{3}}{2})$.