2. Feladatsor – Koordinátageometria síkban és térben

2.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha v_1, v_2, v_3 tetszőleges vektorok a síkban, akkor a sík összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(b) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a síkban, melyek közül kettő nincs egy egyenesben, akkor a sík összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(c) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek közül semelyik kettő nincs egy egyenesben, akkor a tér összes vektora előáll $c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(d) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek nincsenek egy síkban, akkor a tér összes vektora előáll $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ alakban valamely c_1, c_2, c_3 valós számokra.
(e) A síkban az $x + y = 2$ és $2x + 2y = 2$ egyenesek egybe esnek.
(f) A térben az $x - y + z = 2$ és $-x + y + z = -2$ síkok nem párhuzamosak.

2.2. Feladat. Döntse el, hogy a sík, illetve tér alábbi vektorai egy egyenesben, illetve egy síkban vannak-e:

(a) $(2, 1), (0, 0), (-2, -1) \in \mathbb{R}^2$;
(b) $(1, -3), (2, 2), (0, 5) \in \mathbb{R}^2$;
(c) $(1, 1, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2), (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$;
(d) $(-1, 3, 1), (5, 5, 3), (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$;
(e) $(1, -1, 2), (1, 1, -1), (2, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$;
(f) $(-3, 2, -1), (3, -1, 3), (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

2.3. Feladat. Igazolja, hogy a $v_1 = (0, 7, 2),\ v_2 = (1, 6, 1),\ v_3 = (2, 5, 1) \in \mathbb{R}^3$ vektorok nincsenek egy síkban, és fejezze ki az

(a) $(1, -1, 0)$;
(b) $(1, 0, 0)$;
(c) $(-3, 3, 2)$

vektort $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ alakban.

2.4. Feladat. Határozza meg a paraméteres alakban megadott (síkbeli) egyenes egy egyenletét, és az egyenlettel megadott egyenes egy paraméteres alakját:

(a) $x = 7 + 5t,\ y = 8 - 4t\ (t \in \mathbb{R})$;
(b) $x = 1 + t,\ y = 2 + 2t\ (t \in \mathbb{R})$;
(c) $x = -t,\ y = -t\ (t \in \mathbb{R})$;
(d) $5x - 3y = 1$;
(e) $-2x + 4y = 3$;
(f) $3x + 2y = 5$.

2.5. Feladat. Határozza meg a paraméteres alakban megadott sík egy egyenletét, és az egyenlettel megadott sík egy paraméteres alakját:

(a) $x = 2 + t_1 - t_2,\ y = -1 + 3t_2,\ z = 1 + t_1 - 2t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(b) $x = 2 + t_1,\ y = 2 - t_1 + 2t_2,\ z = -1 + t_1 + t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;
(c) $x = -1 - t_1 + t_2,\ y = 1 + 4t_1 - 2t_2,\ z = t_1 + t_2\ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$;

(d) $x + y + z = 6$;
(e) $-x + 2y - z = 0$;
(f) $2x - 3y + z = 5$.

2.6. Feladat. Határozza meg

(a) a síkban az $x - y = 0$ és az $x - 3y = 2$ egyenes metszéspontját;
(b) a síkban a $2x + y = 1$ és az $x + y = 2$ egyenes metszéspontját;
(c) a térben az $x - y - z = 0$ sík és az $x = 2,\ y = t,\ z = t\ (t \in \mathbb{R})$ egyenes metszéspontját;
(d) a térben az $x + y - z = -1$ sík és az $x = 2 - t,\ y = 1 + t,\ z = 2t\ (t \in \mathbb{R})$ egyenes metszéspontját.

2.7. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi e egyenes és P pont esetén a P pont e-re vonatkozó tükörképét:

(a) $e\colon x = 0,\ P = (-2, 3)$;
(b) $e\colon x - 3y = 0,\ P = (7, -1)$;
(c) $e\colon x - y = 0,\ P = (-4, 1)$;
(d) $e\colon 2x + y = 0,\ P = (3, 4)$.

2.8. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi α szög és P pont esetén a P pont képét az origó körüli α szögű elforgatás mellett:

(a) $\alpha = \frac{\pi}{3},\ P = (-1, 0)$;
(b) $\alpha = -\frac{3\pi}{4},\ P = (-1, -2)$;
(c) $\alpha = \frac{3\pi}{4},\ P = (1, -1)$;
(d) $\alpha = -\frac{2\pi}{3},\ P = (3, 4)$.

Szorgalmi feladatok

2.9. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi pontok egy egyenesen vannak-e, és ha nem, akkor határozza meg a rajtuk átmenő sík egyenletét:

(a) $(1, 1, 0),\ (2, -2, -1),\ (4, -8, -3)$;
(b) $(1, 2, -2),\ (0, 1, 1),\ (2, 2, 3)$.

2.10. Feladat. Adja meg az alábbi síkok metszésegyenesét paraméteres alakban:

(a) $x + y + 2z = 0$ és $x - y = 0$;
(b) $x - 2y - 3z = 0$ és $x + y - z = 0$;
(c) $-2x + y + z = 0$ és $x - y - 3z = 0$.

2.11. Feladat. Adja meg az $x = 1 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = 1 - t\ (t \in \mathbb{R})$ egyenest két lényegesen különböző módon két sík metszeteként (azaz „ránézésre” ne lehessen eldönteni a két megadási módról, hogy valóban ugyanazt az egyenest határozzák meg).

2.12. Feladat. Adja meg a térben az alábbi s sík és P pont esetében a P pont s-re vonatkozó tükörképét:

(a) $s\colon x = 0,\ P = (1, -1, 1)$;
(b) $s\colon x - y = 0,\ P = (-2, 1, -1)$;
(c) $s\colon x + y + z = 0,\ P = (1, 0, 0)$.

2.13. Feladat. Adja meg a térben az alábbi α szög, e egyenes és P pont esetén a P pont képét az e körüli α szögű elforgatás mellett.
(a) $\alpha = \frac{\pi}{3},\ e\colon y = z = 0$ (azaz az x-tengely), $P = (-1, 0, 1)$;
(b) $\alpha = -\frac{\pi}{2},\ e\colon x = y, z = 0,\ P = (0, 0, 1)$;
(c) $\alpha = \frac{2\pi}{3},\ e\colon x = y = z,\ P = (1, 0, 0)$.

2.14. Feladat. Adjon meg olyan vektort a térben, amely merőleges az alábbi v_1, v_2 vektorokra. Ha vannak nem egy egyenesbe eső ilyen vektorok is, akkor adjon meg három ilyen vektort, melyek közül semelyik kettő sincs egy egyenesen.
(a) $v_1 = (0, 0, 0),\ v_2 = (1, 2, -2)$;
(b) $v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (2, 1, -1)$;
(c) $v_1 = (-1, 1, \sqrt{2}),\ v_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1)$.

2.15. Feladat. Tetszőleges v_1, v_2 térbeli vektor esetén adjon meg v_1, v_2 koordinátái segítségével olyan vektort, amely v_1-re és v_2-re is merőleges. (Törekedjen arra, hogy minél egyszerűbb legyen a kapott képlet.)

2.16. Feladat. Igazolja, hogy ha v_1, v_2, v_3 olyan térbeli vektorok, amelyek nincsenek egy síkban, akkor a v_1, v_2, v_3 vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata

$$|v_{11}v_{22}v_{33} + v_{12}v_{23}v_{31} + v_{13}v_{21}v_{32} - v_{11}v_{23}v_{32} - v_{12}v_{21}v_{33} - v_{13}v_{22}v_{31}|.$$

(Alkalmazza az előző feladat eredményét.)