1. Feladatsor – Ismétlés – Eredmények

1.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Bármely két különböző sík egyenesben metszi egymást.
(b) Ha három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos egymással, akkor egyetlen közös pontjuk van.
(c) Ha a térben tetszőlegesen adott egy P pont és egy e egyenes, akkor egyetlen olyan f egyenes van a térben, amely átmegy P-n és merőleges e-re.
(d) Ha a térben tetszőlegesen adott egy P pont és egy s sík, akkor egyetlen olyan f egyenes van a térben, amely átmegy P-n és merőleges s-re.
(e) Ha a térben tetszőlegesen adott egy e egyenes és rajta egy P pont, akkor egyetlen olyan sík van a térben, amely tartalmazza P-t és merőleges e-re.
(f) Ha a térben tetszőlegesen adott egy P pont és egy s sík, akkor egyetlen olyan t sík van a térben, amely átmegy P-n és merőleges s-re.
(g) Van olyan szög, amelynek szinusza és tangense azonos.
(h) Van olyan szög, amelynek koszinusza és tangense azonos.

Eredmény. hamis, hamis, hamis, igaz, igaz, hamis, igaz, igaz

1.2. Feladat. Váltsa át a fokokban megadott alábbi szögeket radiánra:

(a) $30°, 225°, -45°, 480°, -510°, 270°$;
(b) $0°, 150°, -60°, 900°, -765°, -210°$.

Eredmény. (a) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{8\pi}{3}, -\frac{17\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$;
(b) $0, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, 5\pi, -\frac{17\pi}{4}, -\frac{7\pi}{6}$.

1.3. Feladat. Váltsa át a radiánban megadott alábbi szögeket fokra:

(a) $-\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3}, \frac{27\pi}{4}, -\frac{7\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}$;
(b) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{3}$.

Eredmény. (a) $-90°, 780°, 1215°, -420°, 570°$;
(b) $-135°, 450°, 660°, -150°, 540°$.

1.4. Feladat. Adja meg (pontosan, ne csak közelítőleg) az előző feladatban megadott szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét.

Eredmény.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{8\pi}{3}$	$-\frac{17\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	5π	$-\frac{17\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{6}$
sin	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	-1	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	0	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{3}$	$\frac{27\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{3}$
sin	-1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	$-$	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$-$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.5. Feladat. Adja meg azokat az

$$I\colon 0 \le \alpha, \beta < 2\pi, \quad J\colon -\pi < \alpha, \beta \le \pi \quad \text{és} \quad K\colon 3\pi \le \alpha, \beta < 4\pi$$

intervallumba eső α, illetve β szögeket radiánban, amelyekre $\sin\alpha$, illetve $\cos\beta$ rendre a következő számokkal egyenlő:

(a) $0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Eredmény. Az I intervallumba eső szögek:

	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
α	$0, \pi$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
β	$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

Az J intervallumba eső szögek:

	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
α	$0, \pi$	$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
β	$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$	0	$-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$

Az K intervallumba eső szögek:

	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
α	3π	$-$	$\frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}$	$-$	$\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}$	$-$	$-$
β	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{10\pi}{3}$	$-$	$\frac{23\pi}{6}$

1.6. Feladat. Adott egy a élhosszúságú kocka. Határozza meg

(a) a lapátló és a testátló hosszát;

(b) két kitérő él felezőpontjának távolságát;

(c) két testátló szögét;

(d) egy testátló és egy végpontjából kiinduló él szögét;

(e) egy lapnak egy testátlóval bezárt szögét.

Eredmény. (a) $\sqrt{2}a$, $\sqrt{3}a$

(b) $\frac{\sqrt{6}}{2}a$

(c) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

(d) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$

(e) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

1.7. Feladat. Adott egy a élhosszúságú szabályos tetraéder. Határozza meg

(a) a testmagasság hosszát;

(b) két kitérő él felezőpontjának távolságát;

(c) két lap által bezárt szöget;

(d) egy lap és egy azt metsző él szögét;

(e) a térfogatát.

Eredmény. (a) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

(b) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

(c) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$
(d) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$
(e) $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

1.8. Feladat. Adott egy a élhosszúságú kocka. Egy csúcsból kiinduló három élének végpontja mentén levágva kapunk egy tetraédert. Határozza meg ebben a tetraéderben

(a) valamely testmagasság hosszát;
(b) két kitérő él felezőpontjának távolságát;
(c) két lap szögét;
(d) egy lap és egy azt metsző él szögét; valamint
(e) a tetraéder térfogatát.

Eredmény. (a) $a, \frac{\sqrt{3}}{3} a$
(b) $\frac{\sqrt{3}}{2} a$
(c) $\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg} \sqrt{2}$
(d) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$
(e) $\frac{1}{6} a^3$