1. Feladatsor – Ismétlés

1.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Bármely két különböző sík egyenesben metszi egymást.
(b) Ha három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos egymással, akkor egyetlen közös pontjuk van.
(c) Ha a térben tetszőlegesen adott egy P pont és egy e egyenes, akkor egyetlen olyan f egyenes van a térben, amely átmegy P-n és merőleges e-re.
(d) Ha a térben tetszőlegesen adott egy P pont és egy s sík, akkor egyetlen olyan f egyenes van a térben, amely átmegy P-n és merőleges s-re.
(e) Ha a térben tetszőlegesen adott egy e egyenes és rajta egy P pont, akkor egyetlen olyan sík van a térben, amely tartalmazza P-t és merőleges e-re.
(f) Ha a térben tetszőlegesen adott egy P pont és egy s sík, akkor egyetlen olyan t sík van a térben, amely átmegy P-n és merőleges s-re.
(g) Van olyan szög, amelynek szinusza és tangense azonos.
(h) Van olyan szög, amelynek koszinusza és tangense azonos.

1.2. Feladat. Váltsa át a fokokban megadott alábbi szögeket radiánra:

(a) $30°, 225°, -45°, 480°, -510°, 270°$;
(b) $0°, 150°, -60°, 900°, -765°, -210°$.

1.3. Feladat. Váltsa át a radiánban megadott alábbi szögeket fokra:

(a) $-\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3}, \frac{27\pi}{4}, -\frac{7\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}$;
(b) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{3}$.

1.4. Feladat. Adja meg (pontosan, ne csak közelítőleg) az előző feladatban megadott szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét.

1.5. Feladat. Adja meg azokat az

$$I\colon 0 \le \alpha, \beta < 2\pi, \quad J\colon -\pi < \alpha, \beta \le \pi \quad \text{és} \quad K\colon 3\pi \le \alpha, \beta < 4\pi$$

intervallumba eső α, illetve β szögeket radiánban, amelyekre $\sin\alpha$, illetve $\cos\beta$ rendre a következő számokkal egyenlő:

(a) $0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$;
(b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.6. Feladat. Adott egy a élhosszúságú kocka. Határozza meg

(a) a lapátló és a testátló hosszát;
(b) két kitérő él felezőpontjának távolságát;
(c) két testátló szögét;
(d) egy testátló és egy végpontjából kiinduló él szögét;
(e) egy lapnak egy testátlóval bezárt szögét.

1.7. Feladat. Adott egy a élhosszúságú szabályos tetraéder. Határozza meg

(a) a testmagasság hosszát;
(b) két kitérő él felezőpontjának távolságát;
(c) két lap által bezárt szöget;
(d) egy lap és egy azt metsző él szögét;

(e) a térfogatát.

1.8. Feladat. Adott egy a élhosszúságú kocka. Egy csúcsból kiinduló három élének végpontja mentén levágva kapunk egy tetraédert. Határozza meg ebben a tetraéderben

(a) valamely testmagasság hosszát;
(b) két kitérő él felezőpontjának távolságát;
(c) két lap szögét;
(d) egy lap és egy azt metsző él szögét; valamint
(e) a tetraéder térfogatát.

Szorgalmi feladatok

1.9. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha három sík páronként metszi egymást, és a páronkénti metszésvonalak közül kettőnek van metszéspontja, akkor a harmadik is átmegy ezen a metszésponton.

1.10. Feladat. Adott két kitérő egyenes és egy pont, amely nincs rajta egyik egyenesen sem. Keressen olyan egyenest, amely átmegy az adott ponton, és mindkét egyenest metszi.

1.11. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha több egyenes közül bármely kettő metszi egymást, akkor vagy valamennyi egy ponton megy át, vagy mindannyian egy síkban vannak.

1.12. Feladat. Adott a térben az e egyenes és az A, B pont. Keresse meg az e egyenes olyan pontjait, amelyek az A és B pontoktól egyenlő távolságra vannak.

1.13. Feladat. Adott a térben egy sík ugyanazon oldalán az A és a B pont. Keresse meg a síkon azokat a P pontokat, amelyekre $|AP| + |PB|$ a lehető legkisebb.

1.14. Feladat. Vetítsünk merőlegesen egy térbeli pontot két egymást metsző síkra. Bizonyítsa be, hogy a vetületekből a két sík metszésvonalára bocsátott merőlegesek talppontjai egybeesnek.

1.15. Feladat. Vetítsük a kockát merőlegesen az egyik testátlóra merőleges síkra. Bizonyítsa be, hogy a vetület szabályos hatszög.

1.16. Feladat. Adott két azonos méretű kocka. Bizonyítsa be, hogy az egyikből kivágható olyan „alagút”, amely teljes egészében a kocka belsejében halad, és amelyen a másik kockát végig lehet tolni.

1.17. Feladat. Állítsa elő a (térbeli) pontra való tükrözést síkra való tükrözések egymás utánjaként.