

## 12. feladatsor – Vektorterek általánosan – Eredmények

**12.1. Feladat.** Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

- (a) A  $\mathbb{Z}_2^2$  vektortérben az  $(1, 0), (0, 1)$  vektoroknak négy lineáris kombinációja van.
- (b) Az  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  vektortér minden altere véges dimenziós.
- (c) Van olyan lineáris egyenletrendszer a  $\mathbb{Z}_3$  test felett, amelynek végtelen sok megoldása van.
- (d) A  $\mathbb{Z}_3^n$  vektortér minden altere  $3^k$  elemszámú valamely  $k \leq n$ -re.
- (e) Egy  $V$  vektortér pontosan akkor nem véges dimenziós, ha minden  $n \in \mathbb{N}$ -re van  $n$  tagú lineárisan független vektorrendszer  $V$ -ben.
- (f) Ha  $U$  és  $V$  véges dimenziós  $T$  test feletti vektortér, akkor  $\text{Hom}(U, V)$  is az.

**Eredmény.** igaz: a,d,e,f  
hamis: b,c

**12.2. Feladat.** Igazolja, hogy vektorteret alkot

- (a) a valós számok teste felett a pozitív valós számok  $V$  halmaza, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^\lambda \quad (u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R});$$

- (b)  $\mathbb{Z}_2$  felett bármely halmaz hatványhalmaza, ha „összeadásnak” a szimmetrikus különbség képzését tekintjük. (A skalárral való szorzást miért nem kell külön definiálni?)

**12.3. Feladat.** Alteret alkotnak-e a  $V$  vektortérben az  $U$  halmazok:

- (a)  $V = \mathbb{Q}^{n \times n}$ ,  $U$  a  $V$ -beli a felső trianguláris mátrixok halmaza;
- (b)  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U$  azon  $V$ -beli mátrixok halmaza, amelyek elemei racionálisak;
- (c)  $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U$  azon  $V$ -beli mátrixok halmaza, melyeknek van sajátértéke;
- (d)  $V = \mathbb{Z}_3^{n \times n}$ ,  $U = \{A \in V : AB = BA\}$ , ahol  $B$  rögzített mátrix;
- (e)  $V = \mathbb{Z}_2^{n \times n}$ ,  $U$  a legfeljebb 2 rangú  $V$ -beli mátrixok halmaza;
- (f)  $V = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ,  $U$  a  $V$ -beli számtani sorozatok halmaza;
- (g)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $U$  a  $V$ -beli mértani sorozatok halmaza (megengedve a csupa 0-ból álló sorozatot is);
- (h)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $U$  a  $V$ -beli monoton sorozatok halmaza;
- (i)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $U$  a  $V$ -beli páros függvények halmaza;
- (j)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $U$  a véges sok zérushellyel rendelkező  $V$ -beli függvények halmaza;
- (k)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ,  $U$  azon  $V$ -beli függvények halmaza, amelyeknek a 0 helyen zérushelye van;
- (l)  $V = \mathbb{Z}_2[x]$ ,  $U$  a  $V$ -beli harmadfokú polinomok halmaza;
- (m)  $V = \mathbb{Q}[x]$ ,  $U$  a  $V$ -beli legfeljebb negyedfokú polinomok halmaza;
- (n)  $V = \mathbb{Z}_2[x]$ ,  $U$  azoknak a  $V$ -beli polinomoknak a halmaza, amelyeknek  $\mathbb{Z}_2$  mindkét eleme zérushelye;
- (o)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,  $U$  a  $V$ -beli origó középpontú forgatások halmaza;
- (p)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ,  $U$  a  $V$ -beli szűrjektív lineáris leképezések halmaza;
- (q)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ,  $U$  azon  $V$ -beli lineáris leképezések halmaza, amelyek képtere az  $y = x$  egyenes;
- (r)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ,  $U$  azon  $V$ -beli lineáris leképezések halmaza, amelyek képtere az  $y = x$  egyenes valamely altere;

(s)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ,  $U$  a  $V$ -beli önadjungált lineáris transzformációk halmaza.

**Eredmény.** altér: a,b,d,f,i,k,m,r,s

nem altér: c,e,g,h,j,l,n,o,p,q

**12.4. Feladat.** Állapítsa meg, hogy az előző feladatban szereplő alterek véges dimenziósak-e.

**Eredmény.** véges: a,b,d,m,r,s

végtelen: f,i,k

**12.5. Feladat.** Döntse el, hogy a  $V$  vektortérbeli  $v$  vektor eleme-e az  $U$  altérnek:

(a)  $V = \mathbb{Q}^4$ ,  $v = (1, -1, -2, 1)$ ,  $U = [(1, 1, 3, 0), (2, 3, 2, 1), (3, 2, -1, 1)]$ ;

(b)  $V = \mathbb{Z}_3^4$ ,  $v = (1, 0, 0, 1)$ ,  $U = [(1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, -1)]$ ;

(c)  $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \right]$ ;

(d)  $V = \mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$ ;

(e)  $V = \mathbb{R}[x]$ ,  $v = 3 + 4x - x^2 + 2x^3$ ,  $U = [1 - 3x^2 + 2x^3, -1 + 2x + 7x^2 - 4x^3]$ ;

(f)  $V = \mathbb{Z}_3[x]$ ,  $v = 1 + x^3$ ,  $U = [1 + x + x^2, -1 + x^2, 1 + x - x^3]$ ;

(g)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,  $v$  az  $x$ -tengelyre való tükrözés,  $U = [\varphi, \psi]$ , ahol  $\varphi$  az  $y$ -tengelyre való merőleges vetítés,  $\psi$  az origó középpontú  $\frac{\pi}{2}$  szögű forgatás;

(h)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ,  $v: (x, y) \mapsto (x - 6y, 5x + 7y)$ ,  $U = [\varphi, \psi]$ , ahol  $\varphi: (x, y) \mapsto (x - 3y, 2x + 4y)$ ,  $\psi: (x, y) \mapsto (x, -x + y)$ .

**Eredmény.** eleme: a,b,c,d,e,f,h

nem eleme: g

**12.6. Feladat.** Egyenlők-e az alábbi  $V$  vektortér megadott  $U_1, U_2$  alterei?

(a)  $V = \mathbb{Z}_3^4$ ;  $U_1 = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)]$ ,  $U_2 = [(1, -1, -1, 0), (1, 1, 0, -1)]$ ;

(b)  $V = \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ ;  $U_1 = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ ,  $U_2 = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ ;

(c)  $V = \mathbb{Q}[x]$ ;  $U_1 = [1 - 2x^2 + 3x^3, x - x^2 + 4x^3, -1 + x + 4x^3]$ ,  $U_2 = [1 + 2x - 2x^2 + 5x^3, 2 - 3x^2 + 3x^3]$ ;

(d)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ;  $U_1 = [\varphi, \psi, \eta]$ ,  $U_2 = [\kappa, \mu]$ , ahol  $\varphi: (x, y) \mapsto (x - 2y, 3y)$ ,  $\psi: (x, y) \mapsto (-y, x + 4y)$ ,  $\eta: (x, y) \mapsto (-x, x + 4y)$ ,  $\kappa: (x, y) \mapsto (x - 2y, 2x + 5y)$ ,  $\mu: (x, y) \mapsto (2x - 3y, 3y)$ .

**Eredmény.** (a) egyenlők

(b) nem egyenlők

(c)  $U_2 \subset U_1$  (nem egyenlők)

(d)  $U_2 \subset U_1$  (nem egyenlők)

**12.7. Feladat.** Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e, és ha igen, akkor bázist alkotnak-e az alábbi vektorok a  $V$  vektortérben:

(a)  $V = \mathbb{Z}_2^6$ ;  $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 1, 1, 0)$ ;

(b)  $V = \mathbb{Z}_3^6$ ;  $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ ;

(c)  $V = \mathbb{Q}^{2 \times 3}$ ;  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

- (d)  $V = \mathbb{Z}_2^{3 \times 2}$ ;  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;
- (e)  $V$  a legfeljebb másodfokú  $\mathbb{R}[x]$ -beli polinomok vektortere;  $1 + x^2$ ,  $x - x^2$ ,  $-1 + x + x^2$ ;
- (f)  $V$  a legfeljebb másodfokú  $\mathbb{Z}_3[x]$ -beli polinomok vektortere;  $1 + x^2$ ,  $x - x^2$ ,  $-1 + x + x^2$ ;
- (g)  $V$  a legfeljebb harmadfokú  $\mathbb{Z}_2[x]$ -beli polinomok vektortere;  $1 + x$ ,  $x + x^2$ ,  $x^2 + x^3$ ,  $1 + x^3$ ;
- (h)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ;  $\varphi$  az  $x$ -tengelyre,  $\psi$  az  $y$ -tengelyre való tükrözés;
- (i)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ;  $\varphi$  az  $x$ -tengelyre,  $\psi$  az  $y$ -tengelyre való merőleges vetítés,  $\eta: (x, y) \mapsto (0, x)$ ,  $\kappa: (x, y) \mapsto (y, 0)$ ;
- (j)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ;  $\varphi$  az  $x, y$ -tengelyek síkjára való tükrözés,  $\psi$  az  $x, y$ -tengelyek síkjára való merőleges vetítés;
- (k)  $V = \text{Hom}(\mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_2^2)$ ,  $\varphi: (x, y, z) \mapsto (x+y, x)$ ,  $\psi: (x, y, z) \mapsto (x+y, z)$ ,  $\eta: (x, y, z) \mapsto (x, x+z)$ ;
- (l)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ;  $1$ ,  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$ ;
- (m)  $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ;  $1$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

**Eredmény.** lineárisan független: b,c,e,h,i,j,m

ebből bázis: e,i

lineárisan függő: a,d,f,g,k,l

**12.8. Feladat.** Határozza meg a  $V$  vektortér  $U$  alterének dimenzióját, és keressen  $U$  megadott generátorrendszerének olyan részrendszerét, amely bázist alkot:

- (a)  $V = \mathbb{Z}_2^5$ ;  $U = [(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)]$ ;
- (b)  $V = \mathbb{Z}_3^5$ ;  $U = [(-1, 1, -1, 1, 0), (1, -1, -1, 0, -1), (-1, 1, 0, 1, -1), (0, 0, -1, -1, 1), (-1, 1, 1, 0, 1)]$ ;
- (c)  $V = \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ;  $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right]$ ;
- (d)  $V = \mathbb{Z}_2[x]$ ;  $U = [1+x+x^4, 1+x+x^2+x^4, x^2+x^3, 1+x+x^3+x^4, 1+x+x^2+x^3+x^4]$ ;
- (e)  $V = \mathbb{Z}_3[x]$ ;  $U = [-1+x-x^2+x^3, 1-x-x^2-x^4, -1+x+x^3-x^4, -x^2-x^3+x^4, -1+x+x^2+x^4]$ ;
- (f)  $V = \mathbb{Q}[x]$ ;  $U = [3-2x+x^2, -12+8x-4x^2, 6-5x+2x^2, 12-9x+4x^2]$ ;
- (g)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ;  $U = [\varphi, \psi, \eta]$ , ahol  $\varphi$  az  $x$ -tengelyre való merőleges vetítés,  $\psi$  az  $y$ -tengelyre való tükrözés,  $\eta$  az identikus leképezés;
- (h)  $V = \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ;  $U = [\varphi, \psi, \eta, \kappa, \mu, \nu]$ , ahol  $\varphi: (x, y, z) \mapsto (x-2y+z, x+2z)$ ,  $\psi: (x, y, z) \mapsto (2x-2y, 3x+y-z)$ ,  $\eta: (x, y, z) \mapsto (4x-6y+2z, 5x+y+3z)$ ,  $\kappa: (x, y, z) \mapsto (-x+z, -2x-y+3z)$ ,  $\mu: (x, y, z) \mapsto (-x+7y-2z, x+3y-5z)$ ,  $\nu: (x, y, z) \mapsto (-3x+4y-2z, 2x-y+z)$ .

**Eredmény.** A legtöbb feladatrészben több lehetőség van a bázis kiválasztására. Ezek közül egyet adunk meg. A bázis elemszáma a dimenzió.

- (a)  $U = [(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0)]$

- (b)  $U = [(-1, 1, -1, 1, 0), (1, -1, -1, 0, -1), (-1, 1, 0, 1, -1)]$   
 (c)  $U = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right]$   
 (d)  $U = [1 + x + x^4, x^2 + x^3, 1 + x + x^3 + x^4]$   
 (e)  $U = [-1 + x - x^2 + x^3, 1 - x - x^2 - x^4, -1 + x + x^3 - x^4]$   
 (f)  $U = [3 - 2x + x^2, 6 - 5x + 2x^2]$   
 (g)  $U = [\varphi, \psi]$   
 (h)  $U = [\varphi, \psi, \mu, \nu]$

**12.9. Feladat.** Adjon meg olyan bázist a  $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  vektortérben, amelynek minden eleme „ismert” geometriai transzformációival megadható ortogonális transzformáció.

**Eredmény.** Egy lehetséges megoldás:

$U = [\varphi, \psi, \eta, \kappa]$ , ahol  $\varphi$  az identitás,  $\psi$  az  $x$ -tengelyre való tükrözés,  $\eta$  az origó körüli  $\frac{\pi}{2}$  szögű forgatás,  $\kappa$  az  $y = x$ -re való tükrözés

**12.10. Feladat.** Állapítsa meg, hogy az alábbi  $\varphi$  leképezések lineárisak-e. Amennyiben igen, akkor

- (i) határozza meg  $\varphi$  magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját;  
 (ii) döntse el, hogy  $\varphi$  injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.
- (a)  $\varphi: \mathbb{Z}_2^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}, X \mapsto X^T$ ;  
 (b)  $\varphi: \mathbb{Z}_3^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Z}_3^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$ ;  
 (c)  $\varphi: \mathbb{Q}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{Q}^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + cu & y + cv \\ u & v \end{pmatrix}$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$  rögzített;  
 (d)  $\varphi: \text{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2), \psi \mapsto 2\psi$ ;  
 (e)  $\varphi: \text{Hom}(\mathbb{Z}_3^3, \mathbb{Z}_3^3) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_3^3, \mathbb{Z}_3^3), \psi \mapsto \psi + \text{id}$ ;  
 (f)  $\varphi: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x], p \mapsto p'$  ( $p$  deriváltja);  
 (g)  $\varphi: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x], a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \mapsto a_0x$ ;  
 (h)  $\varphi: \mathbb{Z}_2[x] \rightarrow \mathbb{Z}_2[x], p \mapsto xp$ .

**Eredmény.** Csak azon tulajdonságokat tüntetjük fel (ii)-ből, amelyeket a lineáris leképezések teljesítenek. Izomorfizmus esetén nem írjuk ki az injektív és szürjektív tulajdonságokat.

- (a) lineáris,  $\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_2^{2 \times 2}$ , izomorfizmus  
 (b) lineáris,  $\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_3^{2 \times 2}$ , izomorfizmus  
 (c) lineáris,  $\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\text{Im } \varphi = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$ , izomorfizmus  
 (d) lineáris,  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  (zérustranszformáció),  $\text{Im } \varphi = \text{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2)$ , izomorfizmus  
 (e) nem lineáris  
 (f) lineáris,  $\text{Ker } \varphi$  a konstans polinomok,  $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}[x]$ , szürjektív  
 (g) lineáris,  $\text{Ker } \varphi$  az összes olyan polinom, melynek konstans tagja 0,  $\text{Im } \varphi = [x]$   
 (h) lineáris,  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ,  $\text{Im } \varphi$  az összes olyan polinom, melynek konstans tagja 0, injektív

**Gyakorló feladatok  $\mathbb{Z}_2$  és  $\mathbb{Z}_3$  feletti számoláshoz**

**12.11. Feladat.** Adja meg a  $\mathbb{Z}_2$  feletti (a),(b) és a  $\mathbb{Z}_3$  feletti (c) lineáris egyenlet-rendszerek általános megoldását, és sorolja is fel az összes megoldásukat:

$$(a) \begin{array}{rcl} x_1 & + & x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \end{array};$$

$$(b) \begin{array}{rcl} x_2 + x_3 & + & x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 & + & x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 & + & x_3 + x_4 = 0 \end{array};$$

$$(c) \begin{array}{rcl} x_2 - x_3 - x_4 & = & -1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_1 & - & x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = & -1 \end{array}.$$

**Eredmény.** (a)  $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$

(b)  $x_1 = x_3 + x_4, x_2 = 1 + x_3 + x_5, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_2$   
 $(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1),$   
 $(1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1)$

(c)  $x_1 = 0, x_2 = -x_4, x_3 = 1 + x_4$   
 $(0, 0, 1, 0), (0, -1, -1, 1), (0, 1, 0, -1)$

**12.12. Feladat.** Számítsa ki az

$$AB + C, BC^T, CB^T - A, BB^T - B^T \quad \text{és} \quad ((AB + C)(AB + C)^T)^{-1}$$

mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő  $\mathbb{Z}_3$  feletti mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 0 \ -1 \ 0), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Eredmény.**

$$(a) AB + C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) BC^T = (0 \ -1 \ 1)$$

$$(c) CB^T - A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) nem létezik

$$(e) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**12.13. Feladat.** Számítsa ki a  $\mathbb{Z}_2$  feletti (a),(b) és a  $\mathbb{Z}_3$  feletti (c),(d) determinánsokat:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Eredmény.** (a) 1

(b) 1

(c) -1

(d) 1