12. feladatsor – Vektorterek általánosan

12.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) A $\mathbb{Z}_2^2$ vektortérben az $(1,0),(0,1)$ vektoroknak négy lineáris kombinációja van.
(b) Az $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektortér minden altere véges dimenziós.
(c) Van olyan lineáris egyenletrendszer a $\mathbb{Z}_3$ test felett, amelynek végtelen sok megoldása van.
(d) A $\mathbb{Z}_3^n$ vektortér minden altere 3^k elemszámú valamely $k \leq n$-re.
(e) Egy V vektortér pontosan akkor nem véges dimenziós, ha minden $n \in \mathbb{N}$-re van n tagú lineárisan független vektorrendszer V-ben.
(f) Ha U és V véges dimenziós T test feletti vektortér, akkor $\mathrm{Hom}(U,V)$ is az.

12.2. Feladat. Igazolja, hogy vektorteret alkot

(a) a valós számok teste felett a pozitív valós számok V halmaza, ha az „összeadást" és a „skalárral való szorzást" a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^{\lambda} \quad (u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R});$$

(b) $\mathbb{Z}_2$ felett bármely halmaz hatványhalmaza, ha „összeadásnak" a szimmetrikus különbség képzését tekintjük. (A skalárral való szorzást miért nem kell külön definiálni?)

12.3. Feladat. Alteret alkotnak-e a V vektortérben az U halmazok:

(a) $V = \mathbb{Q}^{n\times n}$, U a V-beli a felső trianguláris mátrixok halmaza;
(b) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, U azon V-beli mátrixok halmaza, amelyek elemei racionálisak;
(c) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, U azon V-beli mátrixok halmaza, melyeknek van sajátértéke;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^{n\times n}$, $U = \{A \in V : AB = BA\}$, ahol B rögzített mátrix;
(e) $V = \mathbb{Z}_2^{n\times n}$, U a legfeljebb 2 rangú V-beli mátrixok halmaza;
(f) $V = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, U a V-beli számtani sorozatok halmaza;
(g) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, U a V-beli mértani sorozatok halmaza (megengedve a csupa 0-ból álló sorozatot is);
(h) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, U a V-beli monoton sorozatok halmaza;
(i) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, U a V-beli páros függvények halmaza;
(j) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, U a véges sok zérushellyel rendelkező V-beli függvények halmaza;
(k) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, U azon V-beli függvények halmaza, amelyeknek a 0 helyen zérushelye van;
(l) $V = \mathbb{Z}_2[x]$, U a V-beli harmadfokú polinomok halmaza;
(m) $V = \mathbb{Q}[x]$, U a V-beli legfeljebb negyedfokú polinomok halmaza;
(n) $V = \mathbb{Z}_2[x]$, U azoknak a V-beli polinomoknak a halmaza, amelyeknek $\mathbb{Z}_2$ mindkét eleme zérushelye;
(o) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, U a V-beli origó középpontú forgatások halmaza;
(p) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, U a V-beli szürjektív lineáris leképezések halmza;
(q) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, U azon V-beli lineáris leképezések halmaza, amelyek képtere az $y = x$ egyenes;
(r) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, U azon V-beli lineáris leképezések halmaza, amelyek képtere az $y = x$ egyenes valamely altere;
(s) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, U a V-beli önadjungált lineáris transzformációk halmaza.

12.4. Feladat. Állapítsa meg, hogy az előző feladatban szereplő alterek véges dimenziósak-e.

12.5. Feladat. Döntse el, hogy a V vektortérbeli v vektor eleme-e az U altérnek:

(a) $V = \mathbb{Q}^4$, $v = (1, -1, -2, 1)$, $U = [(1, 1, 3, 0), (2, 3, 2, 1), (3, 2, -1, 1)]$;
(b) $V = \mathbb{Z}_3^4$, $v = (1, 0, 0, 1)$, $U = [(1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, -1)]$;
(c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\right]$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$, $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$;
(e) $V = \mathbb{R}[x]$, $v = 3 + 4x - x^2 + 2x^3$, $U = [1 - 3x^2 + 2x^3,\ -1 + 2x + 7x^2 - 4x^3]$;
(f) $V = \mathbb{Z}_3[x]$, $v = 1 + x^3$, $U = [1 + x + x^2,\ -1 + x^2,\ 1 + x - x^3]$;
(g) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, v az x-tengelyre való tükrözés, $U = [\varphi, \psi]$, ahol φ az y-tengelyre való merőleges vetítés, ψ az origó középpontú $\frac{\pi}{2}$ szögű forgatás;
(h) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $v\colon (x, y) \mapsto (x - 6y, 5x + 7y)$, $U = [\varphi, \psi]$, ahol $\varphi\colon (x, y) \mapsto (x - 3y, 2x + 4y)$, $\psi\colon (x, y) \mapsto (x, -x + y)$.

12.6. Feladat. Egyenlők-e az alábbi V vektortér megadott U_1, U_2 alterei?

(a) $V = \mathbb{Z}_3^4$; $U_1 = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)]$, $U_2 = [(1, -1, -1, 0), (1, 1, 0, -1)]$;
(b) $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$; $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$, $U_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$;
(c) $V = \mathbb{Q}[x]$; $U_1 = [1 - 2x^2 + 3x^3, x - x^2 + 4x^3, -1 + x + 4x^3]$, $U_2 = [1 + 2x - 2x^2 + 5x^3, 2 - 3x^2 + 3x^3]$;
(d) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; $U_1 = [\varphi, \psi, \eta]$, $U_2 = [\kappa, \mu]$, ahol $\varphi\colon (x, y) \mapsto (x - 2y, 3y)$, $\psi\colon (x, y) \mapsto (-y, x + 4y)$, $\eta\colon (x, y) \mapsto (-x, x + 4y)]$, $\kappa\colon (x, y) \mapsto (x - 2y, 2x + 5y)$, $\mu\colon (x, y) \mapsto (2x - 3y, 3y)$.

12.7. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e, és ha igen, akkor bázist alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben:

(a) $V = \mathbb{Z}_2^6$; $(1, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 0)$;
(b) $V = \mathbb{Z}_3^6$; $(1, 0, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1, 0)$;
(c) $V = \mathbb{Q}^{2\times 3}$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
(d) $V = \mathbb{Z}_2^{3\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
(e) V a legfeljebb másodfokú $\mathbb{R}[x]$-beli polinomok vektortere; $1 + x^2$, $x - x^2$, $-1 + x + x^2$;
(f) V a legfeljebb másodfokú $\mathbb{Z}_3[x]$-beli polinomok vektortere; $1 + x^2$, $x - x^2$, $-1 + x + x^2$;
(g) V a legfeljebb harmadfokú $\mathbb{Z}_2[x]$-beli polinomok vektortere; $1 + x$, $x + x^2$, $x^2 + x^3$, $1 + x^3$;
(h) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való tükrözés;
(i) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés, $\eta\colon (x, y) \mapsto (0, x)$, $\kappa\colon (x, y) \mapsto (y, 0)$;
(j) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$; φ az x, y-tengelyek síkjára való tükrözés, ψ az x, y-tengelyek síkjára való merőleges vetítés;

(k) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_2^2)$, $\varphi\colon (x,y,z) \mapsto (x+y, x)$, $\psi\colon (x,y,z) \mapsto (x+y, z)$, $\eta\colon (x,y,z) \mapsto (x, x+z)$;

(l) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; $1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$;

(m) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$; $1,\ \sin x,\ \cos x$.

12.8. Feladat. Határozza meg a V vektortér U alterének dimenzióját, és keressen U megadott generátorrendszerének olyan részrendszerét, amely bázist alkot:

(a) $V = \mathbb{Z}_2^5$; $U = [(1,1,0,0,1), (1,1,1,0,1), (0,0,1,1,0), (1,1,0,1,1), (1,1,1,1,1)]$;

(b) $V = \mathbb{Z}_3^5$; $U = [(-1,1,-1,1,0), (1,-1,-1,0,-1), (-1,1,0,1,-1), (0,0,-1,-1,1), (-1,1,1,0,1)]$;

(c) $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$; $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]$;

(d) $V = \mathbb{Z}_2[x]$; $U = [1+x+x^4, 1+x+x^2+x^4, x^2+x^3, 1+x+x^3+x^4, 1+x+x^2+x^3+x^4]$;

(e) $V = \mathbb{Z}_3[x]$; $U = [-1+x-x^2+x^3, 1-x-x^2-x^4, -1+x+x^3-x^4, -x^2-x^3+x^4, -1+x+x^2+x^4]$;

(f) $V = \mathbb{Q}[x]$; $U = [3-2x+x^2,\ -12+8x-4x^2,\ 6-5x+2x^2,\ 12-9x+4x^2]$;

(g) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; $U = [\varphi, \psi, \eta]$, ahol φ az x-tengelyre való merőleges vetítés, ψ az y-tengelyre való tükrözés, η az identikus leképezés;

(h) $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$; $U = [\varphi, \psi, \eta, \kappa, \mu, \nu]$, ahol $\varphi\colon (x,y,z) \mapsto (x-2y+z, x+2z)$, $\psi\colon (x,y,z) \mapsto (2x-2y, 3x+y-z)$, $\eta\colon (x,y,z) \mapsto (4x-6y+2z, 5x+y+3z)$, $\kappa\colon (x,y,z) \mapsto (-x+z, -2x-y+3z)$, $\mu\colon (x,y,z) \mapsto (-x+7y-2z, x+3y-5z)$, $\nu\colon (x,y,z) \mapsto (-3x+4y-2z, 2x-y+z)$.

12.9. Feladat. Adjon meg olyan bázist a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ vektortérben, amelynek minden eleme „ismert” geometriai transzformációival megadható ortogonális transzformáció.

12.10. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi φ leképezések lineárisak-e. Amennyiben igen, akkor

(i) határozza meg φ magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját;

(ii) döntse el, hogy φ injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.

(a) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^{2\times 2} \to \mathbb{Z}_2^{2\times 2},\ X \mapsto X^{\mathrm{T}}$;

(b) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^{2\times 2} \to \mathbb{Z}_3^{2\times 2},\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$;

(c) $\varphi\colon \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2},\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+cu & y+cv \\ u & v \end{pmatrix}$, ahol $c \in \mathbb{R}$ rögzített;

(d) $\varphi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q}^2)$, $\psi \mapsto 2\psi$;

(e) $\varphi\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_3^3, \mathbb{Z}_3^3) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_3^3, \mathbb{Z}_3^3)$, $\psi \mapsto \psi + \mathrm{id}$;

(f) $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p \mapsto p'$ (p deriváltja);

(g) $\varphi\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[x],\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mapsto a_0x$;

(h) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2[x] \to \mathbb{Z}_2[x],\ p \mapsto xp$.

Gyakorló feladatok $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ feletti számoláshoz

12.11. Feladat. Adja meg a $\mathbb{Z}_2$ feletti (a),(b) és a $\mathbb{Z}_3$ feletti (c) lineáris egyenletrendszerek általános megoldását, és sorolja is fel az összes megoldásukat:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array};$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{ccccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \end{array}.$$

12.12. Feladat. Számítsa ki az

$$AB+C,\ BC^{\mathrm{T}},\ CB^{\mathrm{T}}-A,\ BB^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}} \quad \text{és} \quad \big((AB+C)(AB+C)^{\mathrm{T}}\big)^{-1}$$

mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő $\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixokra:

$$A=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

12.13. Feladat. Számítsa ki a $\mathbb{Z}_2$ feletti (a),(b) és a $\mathbb{Z}_3$ feletti (c),(d) determinánsokat:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix};$$

$$\text{(c)}\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix};\quad \text{(d)}\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$