11. feladatsor – Főtengelytétel – Eredmények

11.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja

(a) A sík x-tengelyre való tükrözésének mátrixa $\mathbb{R}^2$ bármely bázisában szimmetrikus.
(b) A síkon az origón átmenő bármely tengelyre vonatkozó tükrözés önadjungált és ortogonális lineáris transzformáció.
(c) Önadjungált lineáris transzformáció mátrixa minden bázisban szimmetrikus.
(d) Ha a sík egy lineáris transzformációjának van sajátértéke, akkor önadjungált.
(e) Ha egy mátrix nem diagonalizálható, akkor nem szimmetrikus.
(f) Minden diagonalizálható mátrix szimmetrikus.
(g) Ortogonális lineáris transzformáció sajátértékei 1 abszolút értékűek.
(h) Az ortogonális lineáris transzformációk éppen a bijektív lineáris transzformációk.
(i) Ha φ ortogonális lineáris transzformáció, akkor $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
(j) Ortogonális lineáris transzformáció mátrixának determinánsa 1.
(k) Ha egy lineáris transzformáció minden sajátértéke 1 vagy -1, akkor a transzformáció ortogonális.
(l) Ha egy lineáris transzformáció mátrixa valamely bázisban diagonális, és minden sajátértéke 1 vagy -1, akkor a transzformáció ortogonális.

Eredmény. Igaz: b, e, g, i, l
Hamis: a, c, d, f, h, j, k

11.2. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren értelmezett φ lineáris transzformáció és a megadott $v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén a $v\varphi^*$ vektort:

(a) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű forgatás, $v = (-1, 3)$;
(b) $n = 2$, $\varphi\colon (x_1, x_2) \mapsto (-x_1 + 2x_2, -3x_1)$, $v = (2, -2)$;
(c) $n = 3$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3)$, $v = (1, 2, 2)$;
(d) $n = 3$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3)$, $v = (-1, 1, 1)$;
(e) $n = 4$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2 + 2x_3, x_1 - 3x_2 + x_4, x_1 - x_3, 2x_2 + 2x_3 + x_4)$, $v = (1, -1, 0, 2)$.

Eredmény. (a) $(\frac{-1+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2})$
(b) $(4, 4)$
(c) $(3, 3, 7)$
(d) $(2, 0, 1)$
(e) $(-1, 6, 4, 1)$

11.3. Feladat. Ortogonálisak-e az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren értelmezett alábbi φ lineáris transzformációk:

(a) $n = 2$, φ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(b) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/6$ szögű forgatás;
(c) $n = 3$, φ az origóra való tükrözés;

(d) $n=3$, φ az $[(-2,1,-1)]$ egyenes körüli $\pi/4$ szögű forgatás;
(e) $n=2$, $\varphi\colon (x_1,x_2)\mapsto (-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;
(f) $n=3$, $\varphi\colon (x_1,x_2,x_3)\mapsto (x_1-x_2+x_3, x_1+2x_2+x_3, -x_1+x_3)$;
(g) $n=4$, $\varphi\colon (x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto (\frac{5}{13}x_3+\frac{12}{13}x_4, \frac{12}{13}x_3-\frac{5}{13}x_4, \frac{5}{13}x_1-\frac{12}{13}x_2,$
$-\frac{12}{13}x_1+\frac{5}{13}x_2)$.

Eredmény. Ortogonális: b, c, d, e
Nem ortogonális: a, f, g

11.4. Feladat. Ortogonálisak-e a következő mátrixok:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix};\quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}?$$

Eredmény. Ortogonális: a, c, e
Nem ortogonális: b, d

11.5. Feladat. Önadjungáltak-e az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér alábbi φ lineáris transzformációi? Ha igen, akkor adjon meg $\mathbb{R}^n$-ben φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, továbbá adja meg φ mátrixát ebben a bázisban:

(a) $n=2$, φ az $y=3x$ egyenesre való tükrözés;
(b) $n=2$, φ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(c) $n=3$, φ az $x+y+z=0$ síkra vonatkozó tükrözés;
(d) $n=3$, φ az $[(1,1,0)]$ egyenesre való tükrözés;
(e) $n=3$, φ az $x+y+z=0$ síkra való merőleges vetítés;
(f) $n=2$, $\varphi\colon (x,y)\mapsto(-3x+4y, 4x+3y)$;
(g) $n=3$, $\varphi\colon (x,y,z)\mapsto(2x+y, y+2x, z)$;
(h) $n=3$, $\varphi\colon (x,y,z)\mapsto(y+z, x+z, x+y)$;
(i) $n=4$, $\varphi\colon (x,y,z,v)\mapsto(x+2z, 2x+z, y+v, y-v)$;
(j) $n=4$, $\varphi\colon (x,y,z,v)\mapsto(2x-y+v, -x+2y-v, 2z, x-y+2v)$.

Eredmény. ONB: ortonormált bázis. A diagonális mátrix a főátló sorrendjétől eltekintve egyértelmű, a bázis azonban nem mindig, csak egy lehetséges megoldást adunk.

(a) önadjungált, ONB: $(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}), (-\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}})$, mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) nem önadjungált

(c) önadjungált, ONB: $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0), (\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$, mátrix: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) önadjungált, ONB: $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0), (0,0,1), (\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, mátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) önadjungált, ONB: $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0), (\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$, mátrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) önadjungált, ONB: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, mátrix: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

(g) nem önadjungált

(h) önadjungált, ONB: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$, mátrix: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i) nem önadjungált

(j) önadjungált, ONB: $(0,0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}})$,

mátrix: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11.6. Feladat. A megadott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixokhoz keressen olyan B ortogonális mátrixot, melyre $B^{-1}AB$ diagonális. Adja meg a B és $B^{-1}AB$ mátrixot is.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Eredmény. A $B^{-1}AB$ mátrix a főátló sorrendjétől eltekintve egyértelmű, a B mátrix azonban nem mindig, csak egy lehetséges megoldást adunk.

(a) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, a B mátrix pedig nagyon csúnya, ezúton kérünk elnézést és intünk óva mindenkit a végigszámolástól.

(b) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

(d) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$

(e) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, a B mátrix itt is csúnya.

11.7. Feladat. Hajtson végre főtengely-transzformációt az alábbi kvadratikus alakokon, azaz ortogonális helyettesítéssel hozza őket kanonikus alakra.

Adja meg egy olyan ortogonális helyettesítés mátrixát is, amely erre az alakra hozza a kvadratikus alakot.
(a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(b) $-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$;
(c) $-2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;
(d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$;
(e) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

Eredmény. Az eredmény: kanonikus alak, helyettesítés mátrixa. A kanonikus alak a változók sorrendjétől eltekintve egyértelmű, a helyettesítés mátrixa azonban nem mindig, csak egy lehetséges megoldást adunk.

(a) $4y_1^2 + y_2^2 - 2x_3^2$, $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(b) $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

(c) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}y_1^2 + 2y_2^2 + \frac{3-\sqrt{17}}{2}y_3^2$, a helyettesítés mátrixa nagyon csúnya.

(d) $y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(e) $5y_1^2 + 5y_2^2 + 3y_3^2 - 3y_4^2$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

11.8. Feladat. Számítsa ki a térben az $(1, 2, -3)$ pont képét a $[(-1, 1, 2)]$ tengely körüli $\pi/3$ szögű forgatás mellett.

Eredmény. $(\frac{11+21\sqrt{2}}{12}, \frac{7+3\sqrt{2}}{12}, -\frac{7}{3} + \frac{3}{2\sqrt{2}})$

11.9. Feladat. Adja meg a sík ($\mathbb{R}^2$ euklideszi tér) összes olyan lineáris transzformációját, amely önadjungált és ortogonális.

Eredmény. Az origón átmenő tengelyre vonatkozó tükrözések, az origóra való tükrözés, és az identitás.