11. feladatsor – Főtengelytétel

11.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) A sík x-tengelyre való tükrözésének mátrixa $\mathbb{R}^2$ bármely bázisában szimmetrikus.
(b) A síkon az origón átmenő bármely tengelyre vonatkozó tükrözés önadjungált és ortogonális lineáris transzformáció.
(c) Önadjungált lineáris transzformáció mátrixa minden bázisban szimmetrikus.
(d) Ha a sík egy lineáris transzformációjának van sajátértéke, akkor önadjungált.
(e) Ha egy mátrix nem diagonalizálható, akkor nem szimmetrikus.
(f) Minden diagonalizálható mátrix szimmetrikus.
(g) Ortogonális lineáris transzformáció sajátértékei 1 abszolút értékűek.
(h) Az ortogonális lineáris transzformációk éppen a bijektív lineáris transzformációk.
(i) Ha φ ortogonális lineáris transzformáció, akkor $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.
(j) Ortogonális lineáris transzformáció mátrixának determinánsa 1.
(k) Ha egy lineáris transzformáció minden sajátértéke 1 vagy -1, akkor a transzformáció ortogonális.
(l) Ha egy lineáris transzformáció mátrixa valamely bázisban diagonális, és minden sajátértéke 1 vagy -1, akkor a transzformáció ortogonális.

11.2. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren értelmezett φ lineáris transzformáció és a megadott $v \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén a $v\varphi^*$ vektort:

(a) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű forgatás, $v = (-1, 3)$;
(b) $n = 2$, $\varphi\colon (x_1, x_2) \mapsto (-x_1 + 2x_2, -3x_1)$, $v = (2, -2)$;
(c) $n = 3$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3)$, $v = (1, 2, 2)$;
(d) $n = 3$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3, 2x_2 + 2x_3)$, $v = (-1, 1, 1)$;
(e) $n = 4$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (-x_2 + 2x_3, x_1 - 3x_2 + x_4, x_1 - x_3, 2x_2 + 2x_3 + x_4)$, $v = (1, -1, 0, 2)$.

11.3. Feladat. Ortogonálisak-e az $\mathbb{R}^n$ euklideszi téren értelmezett alábbi φ lineáris transzformációk:

(a) $n = 2$, φ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(b) $n = 2$, φ az origó körüli $\pi/6$ szögű forgatás;
(c) $n = 3$, φ az origóra való tükrözés;
(d) $n = 3$, φ az $[(-2, 1, -1)]$ egyenes körüli $\pi/4$ szögű forgatás;
(e) $n = 2$, $\varphi\colon (x_1, x_2) \mapsto (-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$;
(f) $n = 3$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_3)$;
(g) $n = 4$, $\varphi\colon (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (\frac{5}{13}x_3 + \frac{12}{13}x_4, \frac{12}{13}x_3 - \frac{5}{13}x_4, \frac{5}{13}x_1 - \frac{12}{13}x_2, -\frac{12}{13}x_1 + \frac{5}{13}x_2)$.

11.4. Feladat. Ortogonálisak-e a következő mátrixok:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}?$$

11.5. Feladat. Önadjungáltak-e az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér alábbi φ lineáris transzformációi? Ha igen, akkor adjon meg $\mathbb{R}^n$-ben φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázist, továbbá adja meg φ mátrixát ebben a bázisban:

(a) $n = 2$, φ az $y = 3x$ egyenesre való tükrözés;
(b) $n = 2$, φ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(c) $n = 3$, φ az $x + y + z = 0$ síkra vonatkozó tükrözés;
(d) $n = 3$, φ az $[(1, 1, 0)]$ egyenesre való tükrözés;
(e) $n = 3$, φ az $x + y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés;
(f) $n = 2$, $\varphi\colon (x, y) \mapsto (-3x + 4y, 4x + 3y)$;
(g) $n = 3$, $\varphi\colon (x, y, z) \mapsto (2x + y, y + 2x, z)$;
(h) $n = 3$, $\varphi\colon (x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$;
(i) $n = 4$, $\varphi\colon (x, y, z, v) \mapsto (x + 2z, 2x + z, y + v, y - v)$;
(j) $n = 4$, $\varphi\colon (x, y, z, v) \mapsto (2x - y + v, -x + 2y - v, 2z, x - y + 2v)$.

11.6. Feladat. A megadott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixokhoz keressen olyan B ortogonális mátrixot, melyre $B^{-1}AB$ diagonális. Adja meg a B és $B^{-1}AB$ mátrixot is.

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11.7. Feladat. Hajtson végre főtengely-transzformációt az alábbi kvadratikus alakokon, azaz ortogonális helyettesítéssel hozza őket kanonikus alakra. Adja meg egy olyan ortogonális helyettesítés mátrixát is, amely erre az alakra hozza a kvadratikus alakot.

(a) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
(b) $-4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_2x_3$;
(c) $-2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;
(d) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$;
(e) $8x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 8x_2x_4$.

11.8. Feladat. Számítsa ki a térben az $(1, 2, -3)$ pont képét a $[(-1, 1, 2)]$ tengely körüli $\pi/3$ szögű forgatás mellett.

11.9. Feladat. Adja meg a sík ($\mathbb{R}^2$ euklideszi tér) összes olyan lineáris transzformációját, amely önadjungált és ortogonális.

Szorgalmi feladatok

11.10. Feladat. Határozza meg a síkon (az $\mathbb{R}^2$ euklideszi téren) az $y = x$ egyenesre való merőleges vetítés és az ugyanezen egyenesre való tükrözés adjungáltját.

11.11. Feladat. Igazolja, hogy a sík, illetve tér (az $\mathbb{R}^2$, illetve $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér) ortogonális lineáris transzformációi éppen az origót fixen hagyó „egybevágósági" transzformációk. (Itt „egybevágósági" transzformáción azokat a transzformációkat értjük, amelyek minden háromszöget vele egybevágóba visznek, azaz olyanba, amelynek oldalhosszai és szögei megegyeznek az eredetiével.)

11.12. Feladat. Legyen φ lineáris transzformáció egy euklideszi téren. Igazolja, hogy ekkor

$$\mathrm{Ker}\ \varphi^* = (\mathrm{Im}\ \varphi)^\perp \text{ és } \mathrm{Im}\ \varphi^* = (\mathrm{Ker}\ \varphi)^\perp$$

(lásd $U^\perp$ definícióját a 10.11. Feladatban).

11.13. Feladat. Mutassa meg, hogy egy euklideszi tér φ lineáris transzformációjára az alábbi feltételek bármelyike következik a másik kettőből:

(1) φ önadjungált,
(2) φ ortogonális,
(3) $\varphi^2 = \mathrm{id}$.

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér mely φ lineáris transzformációi teljesítik mindhárom feltételt?

11.14. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ortogonális mátrixhoz létezik olyan $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ és $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ ortogonális mátrix, amelyre

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

A lehetséges B mátrixok meghatározása után fogalmazza meg a fenti állítás geometriai jelentését.

11.15. Feladat. Hány egész számokból álló 3×3-as ortogonális mátrix van?

11.16. Feladat. Legyen φ és ψ lineáris transzformáció egy euklideszi téren. Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak-e. (Amelyik igaz, azt indokolja, amelyik nem, arra adjon ellenpéldát.)

(1) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi + \psi$ is az.
(2) Ha φ és ψ ortogonális, akkor $\varphi\psi$ is az.
(3) Ha φ ortogonális, de ψ nem, akkor $\varphi\psi$ sem ortogonális.

11.17. Feladat. Ortogonális helyettesítéssel hozza kanonikus alakra a 9.5. Feladatbeli kvadratikus alakot.

11.18. Feladat. Ortogonális helyettesítéssel hozza kanonikus alakra a 9.6. Feladatbeli kvadratikus alakot.

11.19. Feladat. Ha egy szimmetrikus mátrix poziív definit kvadratikus alak mátrixa, akkor nevezzünk magát a mátrixot is pozitív definitnek. Igazolja, hogy minden pozitív definit A mátrix esetén létezik olyan pozitív definit B mátrix, amelyre $B^2 = A$.