# 10. feladatsor – Euklideszi terek – Eredmények

**10.1. Feladat.** Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Minden ortogonális vektorrendszer lineárisan független.
(b) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden alterében van ortonormált bázis.
(c) Van olyan ortonormált vektorrendszer $\mathbb{R}^{1000}$-ben, amely nem egészíthető ki $\mathbb{R}^{1000}$ ortonormált bázisává.
(d) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden $n$ tagú ortonormált vektorrendszere bázis.
(e) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden $n$ tagú ortogonális vektorrendszere bázis.
(f) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel.
(g) Az $\mathbb{R}^m$ és az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér pontosan akkor izomorf egymással, ha $m = n$.

**Eredmény.**
igaz: b,d,g
hamis: a,c,e,f

**10.2. Feladat.** Igazolja, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden $u$ és $v$ vektorára

(1) $u \perp v$ pontosan akkor, ha $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;
(2) $\|u\| = \|v\|$ pontosan akkor, ha $u + v \perp u - v$;
(3) $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$.

Az (1) és (2) állítás a síkgeometria mely ismert tételeit általánosítja? Mi a (3) egyenlőség síkgeometriai jelentése?

**Eredmény.** Csak a megfelelő tételek nevét említjük meg.

(1) Pitagorasz-tétel
(2) Egy paralelogramma átlói pontosan akkor merőlegesek, ha rombusz.
(3) A paralelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik az átlók négyzetösszegével.

**10.3. Feladat.** Határozza meg a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorok által bezárt szöget:

(a) $n = 2$, $v_1 = (1, \sqrt{3})$, $v_2 = (\sqrt{3}, 1)$;
(b) $n = 2$, $v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$;
(c) $n = 2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$;
(d) $n = 3$, $v_1 = (1, -1, 3)$, $v_2 = (5, 2, -1)$;
(e) $n = 3$, $v_1 = (-2, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$;
(f) $n = 3$, $v_1 = (3, -1, 2)$, $v_2 = (2, 1, -1)$;
(g) $n = 4$, $v_1 = (-1, 2, 2, 0)$, $v_2 = (2, -4, 5, 1)$;
(h) $n = 4$, $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1, 1)$;
(i) $n = 4$, $v_1 = (-1, 2, 4, -2)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$.

**Eredmény.** (a) $\frac{\pi}{6}$
(b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{\pi}{4}$
(d) $0$
(e) $\frac{5\pi}{6}$
(f) $\arccos \frac{3}{2\sqrt{21}}$
(g) $0$
(h) $\frac{\pi}{4}$

(i) $\frac{\pi}{4}$

**10.4. Feladat.** Adjon meg az $\mathbb{R}^3$ térben olyan 3 hosszúságú vektort, amely merőleges a $v$ vektorra:

(a) $v = (-1, 1, 0)$;
(b) $v = (1, 4, 2)$.

**Eredmény.** (a) pl. $(0, 0, 3)$
(b) pl. $(\frac{6\sqrt{5}}{5}, 0, -\frac{3\sqrt{5}}{5})$

**10.5. Feladat.** Adja meg az $\mathbb{R}^3$ térben az $(a, b, c)$ pont képét az $x + 2y - z = 3$ síkra való tükrözés mellett.

**Eredmény.** $(\frac{3+2a-2b+c}{3}, \frac{6-2a-b+2c}{3}, \frac{-3+a+2b+2c}{3})$

**10.6. Feladat.** Hajtson végre Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az alábbi $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken, amennyiben lehetséges:

(a) $n = 2$, $(4, 4), (0, 4)$;
(b) $n = 3$, $(1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$;
(c) $n = 3$, $(1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$;
(d) $n = 3$, $(1, -1, 1), (1, 3, 2), (4, 4, -1)$;
(e) $n = 4$, $(1, 1, -1, 1), (2, 1, -1, 0), (2, -1, 3, 2)$;
(f) $n = 4$, $(1, 1, -1, 1), (0, 3, 0, 1), (0, -3, 0, 7)$;
(g) $n = 4$, $(1, -2, 3, 0), (2, -7, 4, 1), (-3, 12, -5, -2)$;
(h) $n = 4$, $(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$;
(i) $n = 4$, $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$.

**Eredmény.** (a) $(4, 4), (-2, 2)$
(b) $(1, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 1)$
(c) $(1, 6, 1)$, $\frac{1}{38}(37, -3, -1)$, $\frac{1}{37}(0, 3, -18)$
(d) $(1, -1, 1), (1, 3, 2)$, $\frac{1}{3}(10, 2, -8)$
(e) $(1, -1, 1, 1), (1, 0, 0, -1), (2, -1, 3, 2)$
(f) $(1, -1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 5, 1, 3)$, $\frac{1}{3}(-8, -4, -8, 4)$
(g) $(1, -2, 3, 0), (0, -3, -2, 1), (0, 0, 0, 0)$
(h) $(1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)$
(i) $(2, 1, 3, -1), (3, 2, -3, -1), (0, 0, 0, 0)$ a negyedik vektor nem számolható ki

**10.7. Feladat.** Adjon meg ortogonális bázist az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér megadott $U$ altereiben, majd egészítse ki őket az $\mathbb{R}^n$ tér ortogonális bázisává:

(a) $n = 3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(b) $n = 3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$;
(c) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$.

**Eredmény.** (a) $(-1, 1, 0)$, $\frac{1}{2}(-1, -1, 2)$, kiegészítés: $(1, 1, 1)$
(b) $(1, 1, -2)$, kiegészítés: $(1, 1, 1), (1, -1, 0)$
(c) $(1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{2}(-1, 1, 2, 0)$, $\frac{1}{3}(1, -1, 1, 3)$, kiegészítés: $(1, -1, 1, -1)$
(d) $(-2, -1, 1, 0)$, $\frac{1}{3}(1, -1, 1, 3)$, kiegészítés: $(1, -1, 1, -1), (0, 1, 1, 0)$