10. feladatsor – Euklideszi terek

10.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Minden ortogonális vektorrendszer lineárisan független.
(b) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden alterében van ortonormált bázis.
(c) Van olyan ortonormált vektorrendszer $\mathbb{R}^{1000}$-ben, amely nem egészíthető ki $\mathbb{R}^{1000}$ ortonormált bázisává.
(d) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden n tagú ortonormált vektorrendszere bázis.
(e) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden n tagú ortogonális vektorrendszere bázis.
(f) Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel.
(g) Az $\mathbb{R}^m$ és az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér pontosan akkor izomorf egymással, ha $m = n$.

10.2. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér minden u és v vektorára

(1) $u \perp v$ pontosan akkor, ha $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$;
(2) $\|u\| = \|v\|$ pontosan akkor, ha $u + v \perp u - v$;
(3) $\|u - v\|^2 + \|u + v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)$.

Az (1) és (2) állítás a síkgeometria mely ismert tételeit általánosítja? Mi a (3) egyenlőség síkgeometriai jelentése?

10.3. Feladat. Határozza meg a $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ vektorok által bezárt szöget:

(a) $n = 2$, $v_1 = (1, \sqrt{3})$, $v_2 = (\sqrt{3}, 1)$;
(b) $n = 2$, $v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$;
(c) $n = 2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$;
(d) $n = 3$, $v_1 = (1, -1, 3)$, $v_2 = (5, 2, -1)$;
(e) $n = 3$, $v_1 = (-2, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$;
(f) $n = 3$, $v_1 = (3, -1, 2)$, $v_2 = (2, 1, -1)$;
(g) $n = 4$, $v_1 = (-1, 2, 2, 0)$, $v_2 = (2, -4, 5, 1)$;
(h) $n = 4$, $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1, 1)$;
(i) $n = 4$, $v_1 = (-1, 2, 4, -2)$, $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$.

10.4. Feladat. Adjon meg az $\mathbb{R}^3$ térben olyan 3 hosszúságú vektort, amely merőleges a v vektorra:

(a) $v = (-1, 1, 0)$;
(b) $v = (1, 4, 2)$.

10.5. Feladat. Adja meg az $\mathbb{R}^3$ térben az (a, b, c) pont képét az $x + 2y - z = 3$ síkra való tükrözés mellett.

10.6. Feladat. Hajtson végre Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást az alábbi $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken, amennyiben lehetséges:

(a) $n = 2$, $(4, 4), (0, 4)$;
(b) $n = 3$, $(1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$;
(c) $n = 3$, $(1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$;
(d) $n = 3$, $(1, -1, 1), (1, 3, 2), (4, 4, -1)$;
(e) $n = 4$, $(1, 1, -1, 1), (2, 1, -1, 0), (2, -1, 3, 2)$;
(f) $n = 4$, $(1, 1, -1, 1), (0, 3, 0, 1), (0, -3, 0, 7)$;
(g) $n = 4$, $(1, -2, 3, 0), (2, -7, 4, 1), (-3, 12, -5, -2)$;
(h) $n = 4$, $(1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7)$;

(i) $n = 4$, $(2, 1, 3, -1), (7, 4, 3, -3), (1, 1, -6, 0), (5, 7, 7, 8)$.

10.7. Feladat. Adjon meg ortogonális bázist az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér megadott U altereiben, majd egészítse ki őket az $\mathbb{R}^n$ tér ortogonális bázisává:
(a) $n = 3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(b) $n = 3$, $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$;
(c) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$;
(d) $n = 4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$.

Szorgalmi feladatok

10.8. Feladat. Bizonyítsa be, hogy minden, legalább kétdimenziós euklideszi térben végtelen sok ortonormált bázis van.

10.9. Feladat. Egészítse ki (minél egyszerűbben) az $(1, -1, 1, 1)$ vektort olyan ortogonális bázissá $\mathbb{R}^4$-ben, melyben minden koordináta egész szám.

10.10. Feladat. Adjon meg az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben végtelen sok olyan vektort, amelyek közül bármely n lineárisan független, de semelyik kettő sem ortogonális.

10.11. Feladat. Döntse el, hogy az $\mathbb{R}^3$ és $\mathbb{R}^4$ euklideszi tereken van-e olyan lineáris transzformáció, amely minden nullvektortól különböző vektort rá merőleges nullvektortól különböző vektorba visz.

10.12. Feladat. Legyen U altér az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben, és legyen $v \in \mathbb{R}^n$. Mutassa meg, hogy az $v + U = \{v + u : u \in U\}$ halmaz pontosan egy U-ra merőleges vektort tartalmaz, és ez éppen $v + U$ legrövidebb eleme.

10.13. Feladat. Egy V euklideszi tér tetszőleges U altere esetén legyen

$$U^\perp = \{v \in V : v \perp u \text{ minden } u \in U \text{ esetén}\}.$$

Bizonyítsa be, hogy
(a) $U^\perp \leq V$,
(b) V minden eleme előáll, mégpedig egyféleképpen $u + u'$ alakban, ahol $u \in U$ és $u' \in U^\perp$.

10.14. Feladat. Egy V euklideszi tér tetszőleges $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszere esetén tekintsük az ún. Gram-féle $\Gamma(u_1, \dots, u_k) = \big|\langle u_i, u_j\rangle\big|_{n\times n}$ determinánst. Igazolja, hogy
(a) $\Gamma(u_1, \dots, u_k) = 0$ pontosan akkor, ha az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan függő;
(b) $\Gamma(u_1, \dots, u_k)$ minden főminora nemnegatív.

10.15. Feladat. Legyen $u_1, \dots, u_k$ lineárisan független vektorrendszer egy V euklideszi térben, $v_1, \dots, v_k$ pedig az az ortogonális vektorrendszer, amelyet $u_1, \dots, u_k$-ból a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással kapunk. Bizonyítsa be, hogy
(a) $\Gamma(u_1, \dots, u_k) = \Gamma(v_1, \dots, v_k)$;
(b) minden i $(1 \leq i \leq k)$-re $\|v_i\| \leq \|u_i\|$.
Mikor teljesül (b)-ben $i > 1$ indexre a $\|v_i\| = \|u_i\|$ egyenlőség?