9. feladatsor – Lineáris leképezések – Eredmények

9.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy négyzetes mátrix sorai lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, akkor a mátrix determinánsa 0.
(b) Hasonló mátrixok rangja megegyezik.
(c) Egy nemzéró mátrix determinánsrangja r, ha van a mátrixban r rendű nemeltűnő aldetermináns.
(d) A sík vektorainak eltolása az $(1,1)$ vektorral lineáris transzformáció a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén.
(e) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterének van olyan lineáris transzformációja, amelynek magtere és képtere is kétdimenziós.
(f) Bármely vektortér összes injektív lineáris transzformációja szürjektív is.
(g) A valós számtest feletti legfeljebb n-edfokú polinomok vektortere izomorf az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel.

Eredmény. igaz: (a),(b)
hamis: (c),(d),(e),(f),(g),(h)

9.2. Feladat. Határozza meg a következő valós ((a)–(c)), $\mathbb{Z}_2$ ((d),(e)) és $\mathbb{Z}_3$ ((e),(f)) feletti mátrixok rangját. Adjon meg a mátrixokban maximális méretű lineárisan független sorvektor-rendszert, oszlopvektor-rendszert és maximális rendű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. Maximális méretű lineárisan független sorvektor- és oszlopvektor-rendszerek:

(a) pl. első, második sor; első, második oszlop
(b) pl. első, második, harmadik sor; első, második, harmadik oszlop
(c) pl. első sor; első oszlop
(d) pl. első, második ötödik sor; első, második, harmadik oszlop
(e) $\mathbb{Z}_2$: pl. első, második, negyedik sor; első, második, harmadik oszlop
$\mathbb{Z}_3$: pl. első, második, harmadik, negyedik, ötödik sor; első, második, harmadik, negyedik, ötödik oszlop

(f) pl. első, második sor; első, második oszlop

A maximális rendű nemeltűnő aldeterminánsok pl. a megadott sorok és oszlopok által meghatározottak.

9.3. Feladat. A Kronecker–Capelli-tétel alkalmazásával döntse el, hogy az alábbi valós ((a)–(c)), $\mathbb{Z}_2$ ((d)) és $\mathbb{Z}_3$ ((e)) feletti lineáris egyenletrendszer az a paraméter mely értékeire oldható meg. A megoldható esetben adja meg a megoldás(oka)t az egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldás-alterének egy bázisa segítségével.

(a) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 + 5x_2 & = & a - 4 \end{array}$;

(b) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 3x_1 + 4x_3 & = & a \end{array}$;

(c) $\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 6x_2 - 11x_3 & = & -3 \\ 3x_1 + (a^2 - 20)x_2 + 5x_3 & = & a + 6 \end{array}$;

(d) $\begin{array}{rcl} x_1 + x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & a \end{array}$;

(e) $\begin{array}{rcl} x_3 - x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + ax_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 & = & a \end{array}$.

Eredmény. (a) $a = 10$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

(b) $a = -5$; $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

(c) $a = 4$: nincs megoldás

$a = -4$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

$a \neq 4, -4$: $x_1 = x_3 = \frac{a-2}{4(a-4)}$, $x_2 = \frac{1}{a-4}$

(d) $a = 0$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{Z}_2$

(e) $a=1$: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $t,s\in\mathbb{Z}_3$

9.4. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ és tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén megadott φ geometriai transzformációkról, valamint a vektorterek között megadott φ leképezésekről állapítsa meg, hogy lineárisak-e. Amennyiben igen, akkor

(i) határozza meg φ magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját;
(ii) döntse el, hogy φ injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.

(a) a sík vektorainak merőleges vetítése az y-tengelyre;
(b) a sík vektorainak $\pi/2$ szögű elforgatása az origó körül;
(c) a sík vektorainak tükrözése az $y=x$ egyenesre;
(d) a tér vektorainak tükrözése az x,y-tengelyek síkjára;
(e) a tér vektorainak merőleges vetítése az x,y-tengelyek síkjára;
(f) $\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(x+y,xy)$;
(g) $\varphi\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $(x,y,z)\mapsto(x-y,x+y)$;
(h) $\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $(x,y)\mapsto(x-2y,-2x+4y,-4x+8y)$;
(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\mapsto(x-y,y+1,x+z)$;
(j) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$, $X\mapsto X^{\mathrm{T}}$;
(k) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$, $\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}u&v\\x&y\end{pmatrix}$;
(l) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$, $\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+cu&y+cv\\u&v\end{pmatrix}$, ahol $c\in\mathbb{R}$;
(m) $\varphi\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $p\mapsto p'$ (p deriváltja);
(n) $\varphi\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\mapsto a_0x$;
(o) $\varphi\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $p\mapsto xp$;
(p) $\varphi\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $p\mapsto q$, ahol q a p polinom hányadosa x-szel osztva (azaz $p=xq+a_0$ és $a_0\in\mathbb{R}$).

Eredmény. Csak azon tulajdonságokat tüntetjük fel (ii)-ből, amelyeket a lineáris leképezések teljesítenek. Izomorfizmus esetén nem írjuk ki az injektív és szürjektív tulajdonságokat.

(a) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=[(1,0)]$, $\operatorname{Im}\varphi=[(0,1)]$
(b) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=\{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^2$, izomorfizmus
(c) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=\{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^2$, izomorfizmus
(d) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=\{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^3$, izomorfizmus
(e) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=[(0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi=[(1,0,0),(0,1,0)]$
(f) nem lineáris
(g) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=[(0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi=[(1,0),(0,1)]$
(h) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=[(2,1,0),(0,0,1)]$, $\operatorname{Im}\varphi=[(1,-2,0)]$
(i) nem lineáris
(j) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^{2\times2}$, izomorfizmus
(k) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^{2\times2}$, izomorfizmus
(l) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$, $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{R}^{2\times2}$, izomorfizmus

(m) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [1]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}[x]$, szürjektív
(n) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi$ az összes olyan polinom, melynek konstans tagja 0, $\operatorname{Im}\varphi = [x]$
(o) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, $\operatorname{Im}\varphi$ az összes olyan polinom, melynek konstans tagja 0
(p) lineáris, $\operatorname{Ker}\varphi = [1]$, $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}[x]$

9.5. Feladat. Az előző feladat (a)–(i) részében megadott φ leképezéseket adja meg $\varphi = \varphi_A$ alakban valamely A mátrixra, amennyiben ez lehetséges.

Eredmény. (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(f) nem lineáris
(g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
(h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
(i) nem lineáris

9.6. Feladat. Adjon meg a V vektortéren olyan φ és ψ lineáris transzformációkat, amelyek rendelkeznek a megadott tulajdonsággal:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker}\varphi = U$, $\operatorname{Im}\varphi = W$ és $\operatorname{Ker}\psi = W$, $\operatorname{Im}\psi = U$, ahol $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $W = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;
(b) $V = \mathbb{R}^2$, φ és ψ két különböző nemidentikus bijektív transzformáció;
(c) $V = \mathbb{Z}_2^2$, φ és ψ két különböző nemidentikus bijektív transzformáció;
(d) $V = \mathbb{R}^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben;
(e) $V = \mathbb{Z}_2^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben;
(f) $V = \mathbb{R}^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben.
(g) $V = \mathbb{Z}_2^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben.

Eredmény. (a) φ az $y = -x$ egyenesre való merőleges vetítés
ψ az $y = x$-re való merőleges vetítés
(b) pl. tükrözés x-tengelyre, forgatás $\frac{\pi}{2}$ szöggel

(c) pl. a következő mátrixokhoz tartozó lineáris transzformációk: $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
(d) pl. merőleges vetítés x-tengelyre, merőleges vetítés y-tengelyre
(e) pl. $\varphi\colon (x,y)\mapsto(x,0)$, $\psi\colon (x,y)\mapsto(0,y)$
(f) pl. merőleges vetítés x-tengelyre, merőleges vetítés y-tengelyre
(g) pl. $\varphi\colon (x,y)\mapsto(x,0)$, $\psi\colon (x,y)\mapsto(0,y)$

9.7. Feladat. Tekintsük a V vektortéren megadott φ és ψ lineáris transzformációkat. Milyen „ismert” lineáris transzformációval egyenlő a $\varphi\psi$ lineáris transzformáció? Továbbá döntse el, hogy fennáll-e a $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi\psi$ és $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi\psi$ egyenlőség.

(a) $V=\mathbb{R}^2$, φ a zérótranszformáció, ψ az identikus transzformáció;
(b) $V=\mathbb{R}^2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;
(c) $V=\mathbb{R}^2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(d) $V=\mathbb{R}^2$, φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
(e) $V=\mathbb{R}^2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/2$ szögű forgatás;
(f) $V=\mathbb{R}^3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára vonatkozó tükrözés;
(g) $V=\mathbb{R}^3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára való merőleges vetítés;
(h) $V=\mathbb{R}^2$, φ az $y=x$ egyenesre vonatkozó tükrözés, $\psi=\varphi_A$, ahol $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$;
(i) $V=\mathbb{R}^2$, $\varphi=\varphi_A$, ahol $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(j) $V=\mathbb{R}[x]$, φ és ψ a 9.4. Feladat (o) és (p) részében megadott transzformáció;
(k) $V=\mathbb{R}[x]$, φ és ψ a 9.4. Feladat (p) és (o) részében megadott transzformáció.

Eredmény. Az eredményekben (Ker) ill. (Im) jelöli, ha $\varphi\psi$ teljesíti a mag- ill. képtérre vonatkozó feltételt.

(a) zérustranszformáció, (Ker)
(b) origó körüli π szögű forgatás, (Ker), (Im)
(c) zérustranszformáció
(d) $\varphi\psi=\psi$, (Ker), (Im)
(e) origó körüli $-\frac{\pi}{6}$ szögű forgatás, (Ker), (Im)
(f) y-tengelyre való tükrözés, (Ker), (Im)
(g) y-tengelyre való merőleges vetítés
(h) vízszintes vetítés $x=y$ egyenesre $((x,y)\mapsto(y,y))$, (Im)
(i) $\varphi\psi=\psi$, (Im)
(j) identikus transzformáció, (Ker), (Im)
(k) $\varphi\psi\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$, $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\mapsto a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$; (Ker), (Im)