9. feladatsor – Lineáris leképezések

9.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy négyzetes mátrix sorai lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, akkor a mátrix determinánsa 0.
(b) Hasonló mátrixok rangja megegyezik.
(c) Egy nemzéró mátrix determinánsrangja r, ha van a mátrixban r rendű nemeltűnő aldetermináns.
(d) A sík vektorainak eltolása az $(1,1)$ vektorral lineáris transzformáció a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén.
(e) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterének van olyan lineáris transzformációja, amelynek magtere és képtere is kétdimenziós.
(f) Bármely vektortér összes injektív lineáris transzformációja szürjektív is.
(g) A valós számtest feletti legfeljebb n-edfokú polinomok vektortere izomorf az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel.

9.2. Feladat. Határozza meg a következő valós ((a)–(c)), $\mathbb{Z}_2$ ((d),(e)) és $\mathbb{Z}_3$ ((e),(f)) feletti mátrixok rangját. Adjon meg a mátrixokban maximális méretű lineárisan független sorvektor-rendszert, oszlopvektor-rendszert és maximális rendű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&5&9\\0&1&0\end{pmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}1&3&9\\2&4&8\\9&3&1\\8&4&2\end{pmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix}1&-2&3\\-3&6&-9\\2&-4&6\\-4&8&-12\end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix}1&1&0&1&1\\0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\0&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\end{pmatrix};\quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0\\1&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$\text{(f)}\ \begin{pmatrix}1&0&-1&1&-1&1\\0&-1&-1&1&-1&0\\-1&1&-1&1&-1&-1\\-1&0&1&-1&1&-1\\1&1&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

9.3. Feladat. A Kronecker–Capelli-tétel alkalmazásával döntse el, hogy az alábbi valós ((a)–(c)), $\mathbb{Z}_2$ ((d)) és $\mathbb{Z}_3$ ((e)) feletti lineáris egyenletrendszer az a paraméter mely értékeire oldható meg. A megoldható esetben adja meg a megoldás(oka)t az egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldás-alterének egy bázisa segítségével.

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3 &=& 3\\ -x_1+3x_2-2x_3 &=& 0\\ x_1+5x_2 &=& a-4\end{array};$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{rcl} x_1+x_2+2x_3 &=& -1\\ 2x_1-x_2+2x_3 &=& -4\\ 3x_1+4x_3 &=& a\end{array};$$

(c) $\begin{array}{lcc} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 6x_2 - 11x_3 & = & -3 \\ 3x_1 + (a^2 - 20)x_2 + 5x_3 & = & a + 6 \end{array}$;

(d) $\begin{array}{lcl} x_1 + x_4 & = & 1 \\ x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 & = & a \end{array}$;

(e) $\begin{array}{lcl} x_3 - x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + ax_4 + x_5 & = & 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 & = & a \end{array}$.

9.4. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ és tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén megadott φ geometriai transzformációkról, valamint a vektorterek között megadott φ leképezésekről állapítsa meg, hogy lineárisak-e. Amennyiben igen, akkor

(i) határozza meg φ magterét és képterét, valamint ezek dimenzióját;
(ii) döntse el, hogy φ injektív-e, szürjektív-e és vektortér-izomorfizmus-e.

(a) a sík vektorainak merőleges vetítése az y-tengelyre;
(b) a sík vektorainak $\pi/2$ szögű elforgatása az origó körül;
(c) a sík vektorainak tükrözése az $y = x$ egyenesre;
(d) a tér vektorainak tükrözése az x, y-tengelyek síkjára;
(e) a tér vektorainak merőleges vetítése az x, y-tengelyek síkjára;
(f) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
(g) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, x + y)$;
(h) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, -4x + 8y)$;
(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + 1, x + z)$;
(j) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $X \mapsto X^{\mathrm{T}}$;
(k) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$;
(l) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + cu & y + cv \\ u & v \end{pmatrix}$, ahol $c \in \mathbb{R}$;
(m) $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto p'$ (p deriváltja);
(n) $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mapsto a_0x$;
(o) $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto xp$;
(p) $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto q$, ahol q a p polinom hányadosa x-szel osztva (azaz $p = xq + a_0$ és $a_0 \in \mathbb{R}$).

9.5. Feladat. Az előző feladat (a)–(i) részében megadott φ leképezéseket adja meg $\varphi = \varphi_A$ alakban valamely A mátrixra, amennyiben ez lehetséges.

9.6. Feladat. Adjon meg a V vektortéren olyan φ és ψ lineáris transzformációkat, amelyek rendelkeznek a megadott tulajdonsággal:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker}\varphi = U$, $\operatorname{Im}\varphi = W$ és $\operatorname{Ker}\psi = W$, $\operatorname{Im}\psi = U$, ahol $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és $W = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$;
(b) $V = \mathbb{R}^2$, φ és ψ két különböző nemidentikus bijektív transzformáció;
(c) $V = \mathbb{Z}_2^2$, φ és ψ két különböző nemidentikus bijektív transzformáció;
(d) $V = \mathbb{R}^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben;

(e) $V = \mathbb{Z}_2^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek magtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben;
(f) $V = \mathbb{R}^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben.
(g) $V = \mathbb{Z}_2^2$, φ és ψ olyan transzformációk, melyek képtere azonos dimenziójú, de két különböző altér V-ben.

9.7. Feladat. Tekintsük a V vektortéren megadott φ és ψ lineáris transzformációkat. Milyen „ismert" lineáris transzformációval egyenlő a $\varphi\psi$ lineáris transzformáció? Továbbá döntse el, hogy fennáll-e a $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi\psi$ és $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi\psi$ egyenlőség.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, φ a zérótranszformáció, ψ az identikus transzformáció;
(b) $V = \mathbb{R}^2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;
(c) $V = \mathbb{R}^2$, φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(d) $V = \mathbb{R}^2$, φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
(e) $V = \mathbb{R}^2$, φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/2$ szögű forgatás;
(f) $V = \mathbb{R}^3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára vonatkozó tükrözés;
(g) $V = \mathbb{R}^3$, φ az x- és y-tengely síkjára, ψ az y- és z-tengely síkjára való merőleges vetítés;
(h) $V = \mathbb{R}^2$, φ az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükrözés, $\psi = \varphi_A$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
(i) $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi = \varphi_A$, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ψ az y-tengelyre való merőleges vetítés;
(j) $V = \mathbb{R}[x]$, φ és ψ a 9.4. Feladat (o) és (p) részében megadott transzformáció;
(k) $V = \mathbb{R}[x]$, φ és ψ a 9.4. Feladat (p) és (o) részében megadott transzformáció.

9.8. Feladat. Oldja meg a 7.5. Feladatot annak a tételnek az alkalmazásával, amely szerint minden T test feletti n-dimenziós vektortér izomorf a T^n vektortérrel.

Szorgalmi feladatok

9.9. Feladat. Az a valós paraméter értékétől függően határozza meg a következő mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

9.10. Feladat. Egy $m \times n$-típusú ($m \geq 2$, $n \geq 2$) mátrix első sorának és első oszlopának minden eleme 0-tól különböző valós szám, de minden más eleme 0. Mennyi a mátrix rangja?

9.11. Feladat. Egy $n \times n$-típusú mátrix első sorának és főátlójának minden eleme 0-tól különböző valós szám, a mátrix többi eleme 0. Mennyi a mátrix rangja?

9.12. Feladat. Határozza meg, hány nemelfajuló $n \times n$-es mátrix van $\mathbb{Z}_2$ felett.

9.13. Feladat. Tetszőleges r $(0 \leq r \leq n)$ esetén határozza meg, hány r-dimenziós altere van a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérnek.

9.14. Feladat. Egy n ismeretlenes valós lineáris egyenletrendszer bővített mártrixának van determinánsa, és ez a determináns nem 0. Mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságáról?

9.15. Feladat. Adja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldás-altér dimenziója 3 legyen. Ekkor adjon meg bázist a megoldások alterében.

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - ax_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

9.16. Feladat. Tekintsük a következő homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Adottak a következő vektorok $\mathbb{R}^5$-ben: $u = (1,1,1,1,1)$, $v = (1,0,-2,0,1)$, $w = (0,-1,0,1,0)$, $x = (1,-2,-2,2,1)$ $y = (1,0,-1,0,0)$. Döntse el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e a fenti egyenletrendszer megoldásainak alterében?

(a) u, v, w;
(b) v, w, x;
(c) w, x, y.

9.17. Feladat. Létezik-e a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett olyan φ lineáris transzformáció, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok? Ha létezik, akkor adjon meg egy-egy ilyen transzformációt.

(a) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \emptyset$;
(b) $\operatorname{Ker}\varphi \cap \operatorname{Im}\varphi = \{\underline{0}\}$;
(c) $\operatorname{Ker}\varphi \subsetneq \operatorname{Im}\varphi$;
(d) $\operatorname{Im}\varphi \subsetneq \operatorname{Ker}\varphi$;
(e) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$.

9.18. Feladat. Mennyi lehet egy $\varphi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés magjának dimenziója? Adjon meg egy-egy példát a legkisebb és a legnagyobb értékre.

9.19. Feladat. A $\varphi \in \operatorname{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy

(1) bármely négy elem képe lineárisan függő vektorrendszert alkot;
(2) bármely hat lineárisan független U-beli elem között van olyan, amelynek képe nem a zérusvektor.

Mekkora lehet U dimenziója?