8. feladatsor – Vektorrendszer rangja – Eredmények

8.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor nincs benne r elemű lineárisan függő részrendszer.
(b) Egy vektorrendszer bármely maximális lineárisan független részrendszere ugyanannyi elemből áll.
(c) Ha egy vektorrendszer minden tagja előáll 2 másik tag lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja 2.
(d) Egy vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei éppen a vektorrendszer által generált altér bázisai.
(e) Minden k tagú lineárisan függő vektorrendszer rangja k.
(f) Ha két vektorrendszer ekvivalens egymással, akkor ugyanazt az alteret generálják.
(g) Ha két vektorrendszer ekvivalens egymással, akkor rangjuk megegyezik.
(h) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek egyik általános megoldásában 3, másik általános megoldásában 4 szabad ismeretlen van.

Eredmény. igaz: (b),(f),(g)
hamis: (a),(c),(d),(e),(h)

8.2. Feladat. Határozza meg (ha lehetséges) a v vektor koordinátáit a V vektortér előírt bázisában:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, bázis: $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$, $v = (1,-1,1)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, bázis: $(1,-1,2),(0,0,1),(1,2,3)$, $v = (1,-1,1)$;
(c) $V = \mathbb{R}^3$, bázis: $(-1,2,1),(1,2,3),(1,1,2)$, $v = (1,-1,0)$;
(d) $V = \mathbb{R}^4$, bázis: $(-1,1,1,0),(1,2,1,-1),(1,1,1,1),(-1,-1,-2,-2)$, $v = (1,2,1,2)$;
(e) $V = \mathbb{Z}_3^4$, bázis: $(1,0,-1,1),(0,1,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,0,1,1)$, $v = (1,0,1,0)$;
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, bázis: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$;
(g) V a legfeljebb harmadfokú $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere, bázis: $1+x^2+x^3, 1+x+x^2, 1+x^2, x^2+x^3$, $v = 1+x+x^3$;
(h) $V = [(1,0,1,-1,0),(-1,1,0,-1,1),(0,1,0,-1,0)] \subseteq \mathbb{Z}_3^5$, bázis: a megadott generátorrendszer, $v = (-1,0,1,-1,-1)$;
(i) $V = [1+x^2+x^3+x^4, 1+x+x^2, x^2+x^3, x+x^2+x^3] \subseteq \mathbb{Z}_2[x]$, bázis: a megadott generátorrendszer, $v = 1+x+x^3+x^4$;
(j) $V = \left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -6 & 5 & 4\end{pmatrix}\right] \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 3}$, bázis: a megadott generátorrendszer, $v = \begin{pmatrix}4 & -8 & -17\\ -20 & 17 & 14\end{pmatrix}$;
(k) $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2+x_3 = 0,\ x_2+x_3+x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$, bázis: tetszőlegesen választott bázis V-ben, $v = (\frac{17}{2},4,-5,1)$;

(l) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$, bázis: tetszőlegesen választott bázis V-ben, $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Eredmény. (a) $1, -2, 2$
(b) $1, -1, 0$
(c) nem bázis, de v eleme a generált altérnek
(d) $1, -1, 5, 2$
(e) $-1, 0, 1, -1$
(f) $-31, -2, 11, -\frac{5}{2}$
(g) $0, 1, 0, 1$
(h) $1, -1, 1$
(i) v nem eleme az altérnek
(j) $-2, 1, 3$
(k) a bázis választásától függ
(l) a bázis választásától függ

8.3. Feladat. Határozza meg a V vektortérbeli megadott vektorrendszer rangját, és adjon meg benne maximális lineárisan független részrendszert:
(a) $V = \mathbb{R}^3$; $(2, 0, 0), (3, -5, 0), (7, -9, -11)$;
(b) $V = \mathbb{R}^4$; $(0, 1, 2, 4), (2, -1, 2, 2), (1, -1, 1, 2)$;
(c) $V = \mathbb{Z}_2^5$; $(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^5$; $(-1, 1, -1, 1, 0), (1, -1, -1, 0, -1), (-1, 1, 0, 1, -1)$, $(0, 0, -1, -1, 1), (-1, 1, 1, 0, 1)$;
(e) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;
(g) V a racionális együtthatós polinomok vektortere; $3 - 2x + x^2$, $-12 + 8x - 4x^2$, $6 - 5x + 2x^2$, $12 - 9x + 4x^2$.

Eredmény. (a) $r = 3$, mindhárom vektor
(b) $r = 3$, mindhárom vektor
(c) $r = 3$, pl. első, harmadik, negyedik vektor
(d) $r = 3$, pl. első, második, harmadik vektor
(e) $r = 3$, pl. első, második, harmadik vektor
(f) $r = 4$, pl. első, második, negyedik, hatodik vektor
(g) $r = 2$, pl. első, harmadik vektor

8.4. Feladat. A 8.3. Feladat (a)–(d) részében megadott vektorrendszerek által generált V-beli alterekben keressen olyan bázist,

(i) amely lépcsős alakú (pontosabban az a mátrix lépcsős alakú, amelynek sorvektorai a bázis elemei);
(ii) amelynek egyik eleme sem skalárszorosa a lépcsős alakú bázis elemeinek;
(iii) amely V standard bázisából a lehető legtöbb elemet tartalmazza.

Eredmény. (a) (i) $(1, 0, 0,), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

(ii) pl. $(5,-5,0),(3,-5,0),(7,-9,-11)$
(iii) $(1,0,0,),(0,1,0),(0,0,1)$
(b) (i) pl. $(1,0,0,-3),(0,1,0,-2),(0,0,1,3)$
(ii) pl. $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$
(iii) pl. $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$
(c) (i) $(1,1,0,0,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$
(ii) pl. $(1,1,1,1,1),(1,1,1,0,1),(1,1,0,1,1)$
(iii) $(1,1,0,0,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$
(d) (i) pl. $(-1,1,0,0,-1),(0,0,1,0,-1),(0,0,0,1,0)$
(ii) pl. $(-1,1,-1,1,0),(1,-1,-1,0,-1),(-1,1,0,1,-1)$
(iii) pl. $(-1,1,0,0,-1),(0,0,1,0,-1),(0,0,0,1,0)$

8.5. Feladat. Határozza meg a V vektortér U alterének dimenzióját, és keressen U megadott generátorrendszerének olyan részrendszerét, amely bázist alkot:

(a) $V=\mathbb{Q}^3$; $U=[(3,-2,1),(-12,8,-4,),(6,-5,1),(12,-9,4)$;
(b) $V=\mathbb{R}^3$; $U=[(1,2,5),(3,4,10),(0,0,0),(7,-2,-5)]$;
(c) $V=\mathbb{R}^4$, $U=[(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$;
(d) $V=\mathbb{R}^4$, $U=[(1,2,4,1),(-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0),\ (1,2,-2,3)]$;
(e) $V=\mathbb{Q}^4$; $U=[(1,-2,-4,3),(-2,4,-8,-6),(3,-6,-12,9)]$;
(f) $V=\mathbb{R}^{3\times 2}$; $U=\left[\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&5\\-6&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-2\\0&-1\\1&3\end{pmatrix},\right.$
$\left.\begin{pmatrix}-1&1\\7&3\\-2&-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3&2\\4&-1\\-2&1\end{pmatrix}\right]$;
(g) $V=\mathbb{R}^{3\times 1}$; $U=\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-9\\-11\end{pmatrix}\right]$;
(h) V a $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere; $U=[1+x+x^4,1+x+x^2+x^4,x^2+x^3,1+x+x^3+x^4,1+x+x^2+x^3+x^4]$;
(i) V a $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; $U=[-1+x-x^2+x^3,1-x-x^2-x^4,-1+x+x^3-x^4,-x^2-x^3+x^4,-1+x+x^2+x^4]$.

Eredmény. A legtöbb feladatrészben több lehetőség van a bázis kiválasztására. Ezek közül egyet adunk meg. A bázis elemszáma a dimenzió.

(a) $U=[(3,-2,1),(6,-5,1)]$
(b) $U=[(1,2,5),(3,4,10)]$
(c) $U=[(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$
(d) $U=[(1,2,4,1),(-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0)]$
(e) $U=[(1,-2,-4,3),(-2,4,-8,-6)]$
(f) $U=\left[\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\7&3\\-2&-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3&2\\4&-1\\-2&1\end{pmatrix}\right]$
(g) $U=\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-5\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-9\\-11\end{pmatrix}\right]$
(h) $U=\left[1+x+x^4,x^2+x^3,1+x+x^3+x^4\right]$
(i) $U=\left[-1+x-x^2+x^3,1-x-x^2-x^4,-1+x+x^3-x^4\right]$

8.6. Feladat. Határozza meg a V vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját. Továbbá adjon meg olyan bázist az $U_1 + U_2$ altérben, amely kiterjesztése

(i) U_1 bázisának;
(ii) $U_1 \cap U_2$ és U_1 bázisának is.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = [(1,2,1,0), (-1,1,1,1)]$, $U_2 = [(2,1,0,-1), (1,-1,3,7)]$;
(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = [(1,2,1,3), (0,-2,3,-1)]$,
$U_2 = [(0,2,-3,1), (0,-2,4,-4), (0,-6,11,-9)]$;
(c) $V = \mathbb{R}^5$, $U_1 = [(1,2,4,-5,1), (0,1,-1,0,2), (1,2,5,-7,2)]$,
$U_2 = [(-2,-3,-6,4,3), (0,-2,2,1,-7), (-1,-2,-5,9,-8)]$;
(d) $V = \mathbb{Z}_2^4$, $U_1 = [(0,1,1,1), (1,1,0,0)]$,
$U_2 = [(1,0,1,1), (0,1,0,1), (1,1,0,1)]$;
(e) $V = \mathbb{Z}_3^5$, $U_1 = [(1,0,-1,1,1), (0,1,-1,-1,1), (-1,1,1,0,0)]$,
$U_2 = [(1,-1,-1,0,0), (0,1,-1,0,0), (-1,1,-1,-1,0)]$;
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right]$,
$U_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\right]$;
(g) $V = \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$, $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$,
$U_2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

Eredmény. Minden feladatrészben megadunk egy-egy megfelelő bázist. A bázis elemszáma a dimenzió.

(a) $U_1 \cap U_2 = [(2,1,0,-1)]$
$U_1 = [(2,1,0,-1), (1,2,1,0)]$
$U_1 + U_2 = [(2,1,0,-1), (1,2,1,0), (1,-1,3,7)]$
(b) $U_1 \cap U_2 = [(0,-2,3,-1)]$
$U_1 = [(0,-2,3,-1), (1,2,1,3)]$
$U_1 + U_2 = [(0,-2,3,-1), (1,2,1,3), (0,-2,4,-4)]$
(c) $U_1 \cap U_2 = [(1,5,-3,3,3), (-3,-8,-3,1,0)]$
$U_1 = [(1,5,-3,3,3), (-3,-8,-3,1,0), (1,2,4,-5,1)]$
$U_1 + U_2 = [(1,5,-3,3,3), (-3,-8,-3,1,0), (1,2,4,-5,1), (0,-2,2,1,-7)]$
(d) $U_1 \cap U_2 = [(1,0,1,1)]$
$U_1 = [(1,0,1,1), (1,1,0,0)]$
$U_1 + U_2 = [(1,0,1,1), (1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)]$
(e) $U_1 \cap U_2 = [(-1,1,1,0,0), (-1,1,0,1,0)]$
$U_1 = [(-1,1,1,0,0), (-1,1,0,1,0), (1,0,-1,1,1)]$
$U_1 + U_2 = [(-1,1,1,0,0), (-1,1,0,1,0), (1,0,-1,1,1), (0,1,-1,0,0)]$
(f) $U_1 \cap U_2 = \left[\begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}\right]$
$U_1 = \left[\begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\right]$
$U_1 + U_2 = \left[\begin{pmatrix} -6 & -11 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\right]$

(g) $U_1 \cap U_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

$$U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$U_1 + U_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

8.7. Feladat. Keresse meg a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér összes alterét, és rajzolja fel az alterek tartalmazásra alkotott részbenrendezett halmazának Hasse-diagramját.

Eredmény. A $\mathbb{Z}_2^3$ vektortérnek 8 eleme van. A 0-dimenziós triviális altéren és a 3-dimenziós $\mathbb{Z}_2^3$ altéren kívül 7 darab 1- és 7 darab 2-dimenziós altere van. Az 1-dimenziós alterek a nullvektort és még egy vektort tartalmaznak. A 2-dimenziós altereknek pontosan 4 eleme van, melyek közül a 3 nullvektortól különböző elem bármelyike a másik kettő összege. Minden 2-dimenziós altér azon 3 darab 1-dimenziós alteret tartalmazza, amelyeknek a nullvektortól különböző eleme benne van az adott 2-dimenziós altérben.
Példa a Hasse-diagram kis részére: