8. feladatsor – Vektorrendszer rangja

8.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy vektorrendszer rangja r, akkor nincs benne r elemű lineárisan függő részrendszer.
(b) Egy vektorrendszer bármely maximális lineárisan független részrendszere ugyanannyi elemből áll.
(c) Ha egy vektorrendszer minden tagja előáll 2 másik tag lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja 2.
(d) Egy vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerei éppen a vektorrendszer által generált altér bázisai.
(e) Minden k tagú lineárisan függő vektorrendszer rangja k.
(f) Ha két vektorrendszer ekvivalens egymással, akkor ugyanazt az alteret generálják.
(g) Ha két vektorrendszer ekvivalens egymással, akkor rangjuk megegyezik.
(h) Van olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek egyik általános megoldásában 3, másik általános megoldásában 4 szabad ismeretlen van.

8.2. Feladat. Határozza meg (ha lehetséges) a v vektor koordinátáit a V vektortér előírt bázisában:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, bázis: $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$, $v = (1,-1,1)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$, bázis: $(1,-1,2),(0,0,1),(1,2,3)$, $v = (1,-1,1)$;
(c) $V = \mathbb{R}^3$, bázis: $(-1,2,1),(1,2,3),(1,1,2)$, $v = (1,-1,0)$;
(d) $V = \mathbb{R}^4$, bázis: $(-1,1,1,0),(1,2,1,-1),(1,1,1,1),(-1,-1,-2,-2)$, $v = (1,2,1,2)$;
(e) $V = \mathbb{Z}_3^4$, bázis: $(1,0,-1,1),(0,1,-1,-1),(1,0,1,-1),(-1,0,1,1)$, $v = (1,0,1,0)$;
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, bázis: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$;
(g) V a legfeljebb harmadfokú $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere, bázis: $1 + x^2 + x^3, 1 + x + x^2, 1 + x^2, x^2 + x^3$, $v = 1 + x + x^3$;
(h) $V = [(1,0,1,-1,0),(-1,1,0,-1,1),(0,1,0,-1,0)] \subseteq \mathbb{Z}_3^5$, bázis: a megadott generátorrendszer, $v = (-1,0,1,-1,-1)$;
(i) $V = [1 + x^2 + x^3 + x^4, 1 + x + x^2, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3] \subseteq \mathbb{Z}_2[x]$, bázis: a megadott generátorrendszer, $v = 1 + x + x^3 + x^4$;
(j) $V = \left[\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -6 & 5 & 4\end{pmatrix}\right] \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 3}$, bázis: a megadott generátorrendszer, $v = \begin{pmatrix}4 & -8 & -17\\ -20 & 17 & 14\end{pmatrix}$;
(k) $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$, bázis: tetszőlegesen választott bázis V-ben, $v = (\frac{17}{2}, 4, -5, 1)$;
(l) $V = \left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} : x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\} \subseteq \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$, bázis: tetszőlegesen választott bázis V-ben, $v = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

8.3. Feladat. Határozza meg a V vektortérbeli megadott vektorrendszer rangját, és adjon meg benne maximális lineárisan független részrendszert:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $(2,0,0),(3,-5,0),(7,-9,-11)$;
(b) $V = \mathbb{R}^4$; $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$;
(c) $V = \mathbb{Z}_2^5$; $(1,1,0,0,1),(1,1,1,0,1),(0,0,1,1,0),(1,1,0,1,1),(1,1,1,1,1)$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^5$; $(-1,1,-1,1,0),(1,-1,-1,0,-1),(-1,1,0,1,-1),$ $(0,0,-1,-1,1),(-1,1,1,0,1)$;
(e) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & -4\\ -5 & -3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -2\\ -7 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$;
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ -6 & -2\end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}$;
(g) V a racionális együtthatós polinomok vektortere; $3-2x+x^2,\ -12+8x-4x^2,\ 6-5x+2x^2,\ 12-9x+4x^2$.

8.4. Feladat. A 8.3. Feladat (a)–(d) részében megadott vektorrendszerek által generált V-beli alterekben keressen olyan bázist,

(i) amely lépcsős alakú (pontosabban az a mátrix lépcsős alakú, amelynek sorvektorai a bázis elemei);
(ii) amelynek egyik eleme sem skalárszorosa a lépcsős alakú bázis elemeinek;
(iii) amely V standard bázisából a lehető legtöbb elemet tartalmazza.

8.5. Feladat. Határozza meg a V vektortér U alterének dimenzióját, és keressen U megadott generátorrendszerének olyan részrendszerét, amely bázist alkot:

(a) $V = \mathbb{Q}^3$; $U = [(3,-2,1),(-12,8,-4,),(6,-5,1),(12,-9,4)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$; $U = [(1,2,5),(3,4,10),(0,0,0),(7,-2,-5)]$;
(c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = [(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$;
(d) $V = \mathbb{R}^4$, $U = [(1,2,4,1),\ (-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0),\ (1,2,-2,3)]$;
(e) $V = \mathbb{Q}^4$; $U = [(1,-2,-4,3),(-2,4,-8,-6),(3,-6,-12,9)]$;
(f) $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$; $U = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & 5\\ -6 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\right.$ $\left.\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 7 & 3\\ -2 & -5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\right]$;
(g) $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$; $U = \left[\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ -5\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\ -9\\ -11\end{pmatrix}\right]$;
(h) V a $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere; $U = [1+x+x^4, 1+x+x^2+x^4, x^2+x^3, 1+x+x^3+x^4, 1+x+x^2+x^3+x^4]$;
(i) V a $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; $U = [-1+x-x^2+x^3, 1-x-x^2-x^4, -1+x+x^3-x^4, -x^2-x^3+x^4, -1+x+x^2+x^4]$.

8.6. Feladat. Határozza meg a V vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját. Továbbá adjon meg olyan bázist az $U_1 + U_2$ altérben, amely kiterjesztése

(i) U_1 bázisának;

(ii) $U_1 \cap U_2$ és U_1 bázisának is.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = [(1,2,1,0), (-1,1,1,1)]$, $U_2 = [(2,1,0,-1), (1,-1,3,7)]$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = [(1,2,1,3), (0,-2,3,-1)]$,
$U_2 = [(0,2,-3,1), (0,-2,4,-4), (0,-6,11,-9)]$;

(c) $V = \mathbb{R}^5$, $U_1 = [(1,2,4,-5,1), (0,1,-1,0,2), (1,2,5,-7,2)]$,
$U_2 = [(-2,-3,-6,4,3), (0,-2,2,1,-7), (-1,-2,-5,9,-8)]$;

(d) $V = \mathbb{Z}_2^4$, $U_1 = [(0,1,1,1), (1,1,0,0)]$,
$U_2 = [(1,0,1,1), (0,1,0,1), (1,1,0,1)]$;

(e) $V = \mathbb{Z}_3^5$, $U_1 = [(1,0,-1,1,1), (0,1,-1,-1,1), (-1,1,1,0,0)]$,
$U_2 = [(1,-1,-1,0,0), (0,1,-1,0,0), (-1,1,-1,-1,0)]$;

(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right]$,
$U_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\right]$;

(g) $V = \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$, $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$,
$U_2 = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

8.7. Feladat. Keresse meg a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér összes alterét, és rajzolja fel az alterek tartalmazásra alkotott részbenrendezett halmazának Hasse-diagramját.

Szorgalmi feladatok

8.8. Feladat. Legyen a v vektor koordinátasora a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bázisban $(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Igazolja, hogy ekkor a $v, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer is bázis, és adja meg benne a v_1 vektor koordinátáit. A koordinátasorban 1 helyett milyen koordináta esetén nem igaz ez az állítás?

8.9. Feladat. Határozza meg az a valós paraméter értékétől függően az $\mathbb{R}^{2n}$ vektortérbeli

$$(1,0,0,\ldots,0,0,a), (0,1,0,\ldots,0,a,0), \ldots, (0,\ldots,0,1,a,0,\ldots,0),$$
$$(0,\ldots,0,a,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,a,0,\ldots,0,1,0), (a,0,0,\ldots,0,0,1)$$

vektorrendszer rangját.

8.10. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortérbeli

$$(1,1,0,\ldots,0), (0,1,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1,1), (1,0,\ldots,0,1)$$

vektorrendszer rangját.

8.11. Feladat. Igazolja, hogy a T^n vektortér összes alterének van olyan bázisa, amelyben a vektorok koordinátáinak összege azonos.

8.12. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer esetén $r(v_1, v_2, \ldots, v_k) = r(v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_k)$.

8.13. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerek esetén $r(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k) \le r(u_1, u_2, \ldots, u_k) + r(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

8.14. Feladat. Adja meg az összes olyan $(n-1)$-dimenziós alteret a T^n ($n \in \mathbb{N}$) vektortérben, amely nem tartalmazza T^n standard bázisának egyetlen elemét sem. A $T = \mathbb{Z}_2$ és $T = \mathbb{Z}_3$ esetben hány ilyen altér van?

8.15. Feladat. Igazolja, hogy ha az n-dimenziós V vektortérben van olyan r és s rangú vektorrendszer, amely együttesen generálja a V vektorteret, akkor $r + s \geq n$.

8.16. Feladat. Mutassa meg, hogy ha U_1 és U_2 olyan alterek egy n-dimenziós V vektortérben, amelyekre $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ és $\dim U_1 + \dim U_2 = n$, akkor U_1 tetszőleges $e_1, e_2, \ldots, e_{\dim U_1}$ bázisa és U_2 tetszőleges $f_1, f_2, \ldots, f_{\dim U_2}$ bázisa esetén az $e_1, e_2, \ldots, e_{\dim U_1}, f_1, f_2, \ldots, f_{\dim U_2}$ vektorrendszer bázis V-ben.