7. feladatsor – Lineáris függetlenség, dimenzió – Eredmények

7.1. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer a V vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generátorrendszer V-ben, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.

(b) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generátorrendszer V-ben.

(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor bármely i-re v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

(d) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor van olyan i, melyre v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.

(e) A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden i-re $[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k] \neq [v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

(f) Van olyan lineárisan független részrendszer a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerben, amely generálja a $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ alteret.

Eredmény. igaz: (d),(e),(f)
hamis: (a),(b),(c)

7.2. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ lineárisan függő vektorrendszert alkot.

(b) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ nem generálja V-t.

(c) Ha egy V vektortérben nincs olyan ötelemű vektorrendszer, amely generálja V-t, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.

(d) Ha egy V vektortérben a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független, a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vektorrendszer pedig lineárisan függő, akkor a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok bázist alkotnak V-ben.

(e) Ha egy vektortérben van négyelemű lineárisan független vektorrendszer és hatelemű generátorrendszer, akkor a vektortér dimenziója 5.

(f) Ha egy n-dimenziós vektortérben valamely k-elemű lineárisan független vektorrendszernek van olyan l-elemű részrendszere, mely generálja a vektorteret, akkor $n = k = l$.

Eredmény. igaz: (a),(f)
hamis: (b),(c),(d),(e)

7.3. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben. Ha igen, akkor állapítsa meg, hogy bázist alkotnak-e, és ha nem, akkor egészítse ki a vektorrendszert V bázisává.

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $(1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$; $(1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)$;
(c) $V = \mathbb{Q}^3$; $(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1)$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $(0, 1, -1), (-1, -1, 1)$;

(e) $V=\mathbb{R}^4$; $(1,-2,3,4),(0,-3,1,2),(2,-4,5,9)$;
(f) $V=\mathbb{Q}^4$; $(1,-1,1,1),(0,1,2,1),(1,1,1,0),(-1,2,1,1)$;
(g) $V=\mathbb{R}^5$; $(0,0,2,4,-2),(3,0,0,-3,-3),(-1,-1,2,4,1)$;
(h) $V=\mathbb{Z}_2^5$; $(1,1,0,1,1),(0,1,1,1,1)$;
(i) $V=\mathbb{Z}_2^6$; $(1,0,0,1,0,0),(0,1,1,1,0,1),(1,1,1,0,0,0),(1,1,0,1,1,0),$ $(0,0,1,0,0,1),(1,1,1,1,1,0)$;
(j) $V=\mathbb{Z}_3^6$; $(1,0,1,1,0,1),(1,1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1,0)$;
(k) $V=\mathbb{R}^{2\times 3}$; $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;
(l) $V=\mathbb{Z}_2^{3\times 2}$; $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$;
(m) V a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektortere; $1+x^2$, $x-x^2$, $-1+x-2x^2$;
(n) V a legfeljebb másodfokú $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere; 1, $1+x$, $1+x+x^2$;
(o) V a legfeljebb harmadfokú $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; x, $1+x$, $1+x^2-x^3$.

Eredmény. lineárisan független: (b),(d),(e),(f),(g),(h),(j),(k),(l),(n),(o)
lineárisan függő: (a),(c),(i),(m)

7.4. Feladat. Az a valós paraméter mely értékeire alkotnak a V vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert. A lineárisan független vektorrendszereket egészítse ki V bázisává.

(a) $V=\mathbb{R}^4$; $(3,2,1,-4),(-2,-4,-1,4),(a,10,3,-12)$;
(b) $V=\mathbb{R}^5$; $(-1,1,2,-3,-1),(-1,3,7,-8,-2),(a,-4,-11,9,1)$;
(c) $V=\mathbb{Z}_3^5$; $(-1,1,a,a,1),(1,1,0,0,1),(0,0,a,0,1)$;
(d) $V=\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$;
(e) V a legfeljebb negyedfokú $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; $-1+x$, $1-x-x^2+ax^3$, $1+x-x^2+x^3$.

Eredmény. (a) lineárisan független $\Leftrightarrow a\neq 7$: $(0,0,1,0)$
(b) lineárisan független $\Leftrightarrow a\neq -2$: $(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0)$
(c) mindig lineárisan független: $(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$
(d) lineárisan független $\Leftrightarrow a=1$: $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$
(e) mindig lineárisan független: x^3,x^4

7.5. Feladat. Legyen u,v,w lineárisan független vektorrendszer valamely számtest feletti vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

(a) $u+v,\ u-v,\ u-2v+w$;
(b) $u+2v,\ u+2w,\ -2v+w$;
(c) $u+3v+2w,\ 2u+w,\ u+v+w$.

Eredmény. (a) lineárisan független
(b) lineárisan független
(c) lineárisan függő

7.6. Feladat. Határozza meg a V vektortér U alterének dimenzióját, és adjon meg bázist U-ban. Ha V véges vektortér, akkor adja meg az U altér elemszámát is.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;
(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon x_1 - 3x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$;
(c) $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;
(d) $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$, $U = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\right\}$;
(e) $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$, $U = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$;
(f) $V = \mathbb{Z}_3^{2\times 3}$, $U = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_3 + x_4 = 0,\right.$
$\left. x_3 - x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0\right\}$.

Eredmény. (a) $d = 2$: $(2, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)$
(b) $d = 2$: $(3, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)$
(c) $d = 1$: $(-3, -15, 10, 8)$
(d) $d = 2$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(e) $d = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, az U altér 4 elemű
(f) $d = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, az U altér 9 elemű

7.7. Feladat. Határozza meg a V vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját. Továbbá adjon meg egy bázist $U_1 \cap U_2$-ben, és egészítse ki U_1 és U_2 bázisává.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$;
(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0,\ 3x_3 + x_4 = 0\}$;
(c) $V = \mathbb{Z}_3^5$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_2 - x_4 + x_5 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$;
(d) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_4 = 0,\ x_1 - 2x_4 = 0\right\}$,
$U_2 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 - 2x_4 = 0,\ x_3 + 3x_4 = 0\right\}$;
(e) $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 3}$, $U_1 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : x_1 + x_4 = 0\right\}$,
$U_2 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_6 = 0\right\}$.

Eredmény. (a) $\dim(U_1 + U_2) = 4$ (így $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4$)
$U_1 \cap U_2 = [(3, -3, 2, 1)]$
$U_1 = [(3, -3, 2, 1), (1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0)]$
$U_2 = [(3, -3, 2, 1), (-1, 1, 0, 0)]$

(b) $\dim(U_1+U_2)=4$ (így $U_1+U_2=\mathbb{R}^4$)
$U_1\cap U_2=\{(0,0,0,0)\}=[\emptyset]$
$U_1=[(-3,2,1,0),(0,0,0,1)]$
$U_2=[(1,0,0,0),(0,6,-1,3)]$

(c) $\dim(U_1+U_2)=4$
$U_1\cap U_2=U_2=[(-1,0,1,0,0),(1,1,0,1,0),(1,-1,0,0,1)]$
$U_1=[(-1,0,1,0,0),(1,1,0,1,0),(1,-1,0,0,1),(1,0,0,0,0)]$

(d) $\dim(U_1+U_2)=4$ (így $U_1+U_2=\mathbb{R}^{2\times 2}$)
$$U_1\cap U_2=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}=[\emptyset]$$
$$U_1=\left[\begin{pmatrix}-3&2\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]$$
$$U_2=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&6\\3&-1\end{pmatrix}\right]$$

(e) $\dim(U_1+U_2)=6$ (így $U_1+U_2=\mathbb{Z}_2^{2\times 3}$)
$$U_1\cap U_2=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$$
$$U_1=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$
$$U_2=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]$$