7. feladatsor – Lineáris függetlenség, dimenzió

7.1. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer a V vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generátorrendszer V-ben, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.
(b) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ generátorrendszer V-ben.
(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor bármely i-re v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.
(d) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor van olyan i, melyre v_i előáll a $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.
(e) A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden i-re $[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k] \neq [v_1, v_2, \ldots, v_k]$.
(f) Van olyan lineárisan független részrendszer a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorrendszerben, amely generálja a $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ alteret.

7.2. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ lineárisan függő vektorrendszert alkot.
(b) Ha egy V vektortérben a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorrendszer bázis, akkor van olyan v eleme V-nek, amelyre $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ nem generálja V-t.
(c) Ha egy V vektortérben nincs olyan ötelemű vektorrendszer, amely generálja V-t, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.
(d) Ha egy V vektortérben a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszer lineárisan független, a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 vektorrendszer pedig lineárisan függő, akkor a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok bázist alkotnak V-ben.
(e) Ha egy vektortérben van négyelemű lineárisan független vektorrendszer és hatelemű generátorrendszer, akkor a vektortér dimenziója 5.
(f) Ha egy n-dimenziós vektortérben valamely k-elemű lineárisan független vektorrendszernek van olyan l-elemű részrendszere, mely generálja a vektorteret, akkor $n = k = l$.

7.3. Feladat. Döntse el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben. Ha igen, akkor állapítsa meg, hogy bázist alkotnak-e, és ha nem, akkor egészítse ki a vektorrendszert V bázisává.

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $(1, -1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (1, -2, 1)$;
(b) $V = \mathbb{R}^3$; $(1, 2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)$;
(c) $V = \mathbb{Q}^3$; $(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, -3, -1)$;
(d) $V = \mathbb{Z}_3^3$; $(0, 1, -1), (-1, -1, 1)$;
(e) $V = \mathbb{R}^4$; $(1, -2, 3, 4), (0, -3, 1, 2), (2, -4, 5, 9)$;
(f) $V = \mathbb{Q}^4$; $(1, -1, 1, 1), (0, 1, 2, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, 2, 1, 1)$;
(g) $V = \mathbb{R}^5$; $(0, 0, 2, 4, -2), (3, 0, 0, -3, -3), (-1, -1, 2, 4, 1)$;
(h) $V = \mathbb{Z}_2^5$; $(1, 1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1)$;

(i) $V = \mathbb{Z}_2^6$; $(1,0,0,1,0,0), (0,1,1,1,0,1), (1,1,1,0,0,0), (1,1,0,1,1,0),$ $(0,0,1,0,0,1), (1,1,1,1,1,0)$;

(j) $V = \mathbb{Z}_3^6$; $(1,0,1,1,0,1), (1,1,0,1,1,0), (0,1,0,0,1,0)$;

(k) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$; $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(l) $V = \mathbb{Z}_2^{3\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(m) V a legfeljebb másodfokú valós polinomok vektortere; $1+x^2$, $x-x^2$, $-1+x-2x^2$;

(n) V a legfeljebb másodfokú $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere; 1, $1+x$, $1+x+x^2$;

(o) V a legfeljebb harmadfokú $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; x, $1+x$, $1+x^2-x^3$.

7.4. Feladat. Az a valós paraméter mely értékeire alkotnak a V vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert. A lineárisan független vektorrendszereket egészítse ki V bázisává.

(a) $V = \mathbb{R}^4$; $(3,2,1,-4), (-2,-4,-1,4), (a,10,3,-12)$;

(b) $V = \mathbb{R}^5$; $(-1,1,2,-3,-1), (-1,3,7,-8,-2), (a,-4,-11,9,1)$;

(c) $V = \mathbb{Z}_3^5$; $(-1,1,a,a,1), (1,1,0,0,1), (0,0,a,0,1)$;

(d) $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) V a legfeljebb negyedfokú $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; $-1+x$, $1-x-x^2+ax^3$, $1+x-x^2+x^3$.

7.5. Feladat. Legyen u, v, w lineárisan független vektorrendszer valamely számtest feletti vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

(a) $u+v,\ u-v,\ u-2v+w$;

(b) $u+2v,\ u+2w,\ -2v+w$;

(c) $u+3v+2w,\ 2u+w,\ u+v+w$.

7.6. Feladat. Határozza meg a V vektortér U alterének dimenzióját, és adjon meg bázist U-ban. Ha V véges vektortér, akkor adja meg az U altér elemszámát is.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1 - 3x_2 - x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$;

(c) $V = \mathbb{Q}^4$, $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0,\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$;

(d) $V = \mathbb{Q}^{2\times 2}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + 2x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \right\}$;

(e) $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$;

(f) $V = \mathbb{Z}_3^{2\times 3}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \right.$ $\left. x_3 - x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0 \right\}$.

7.7. Feladat. Határozza meg a V vektortér U_1, U_2 alterei esetén az $U_1 \cap U_2$ és $U_1 + U_2$ alterek dimenzióját. Továbbá adjon meg egy bázist $U_1 \cap U_2$-ben, és egészítse ki U_1 és U_2 bázisává.

(a) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - 2x_4 = 0\}$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0,\ 3x_3 + x_4 = 0\}$;

(c) $V = \mathbb{Z}_3^5$, $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_2 - x_4 + x_5 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$;

(d) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_4 = 0,\ x_1 - 2x_4 = 0 \right\}$,
$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_1 - 2x_4 = 0,\ x_3 + 3x_4 = 0 \right\}$;

(e) $V = \mathbb{Z}_2^{2\times 3}$, $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : x_1 + x_4 = 0 \right\}$,
$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0,\ x_3 + x_6 = 0 \right\}$.

Szorgalmi feladatok

7.8. Feladat. Legyen $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ két tetszőleges vektorrendszer a V vektortérben. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor az $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k$ vektorrendszer is az.

(b) Ha $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor u_1, $u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ is az.

(c) Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor a $v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots$, $v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ vektorrendszer is az.

7.9. Feladat. Lineárisan függetlenek-e a következő vektorrendszerek az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektortérben:

(a) $1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$;

(b) $1,\ \sin x,\ \cos x$.

7.10. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazolja, hogy ez a vektor a nullvektor.

7.11. Feladat. A v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1, v_2, v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?

7.12. Feladat. Határozza meg, hány egy-, két- és háromelemű lineárisan független vektorrendszer van a $\mathbb{Z}_2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) vektortérben.

7.13. Feladat. Adja meg az a paraméter összes olyan értékét, amelyre az alábbi vektorrendszer NEM bázisa a megadott V vektortérnek:

(a) $V = \mathbb{R}^4$; $(1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (-1, a, 2, 1)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4$; $(1,0,1,2), (-1,2,1,2), (1,0,1,0), (1,2,4,a)$;

(c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$;

(d) V a legfeljebb másodfokú $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere; $a + x$, $ax + x^2$, $1 + ax^2$.

7.14. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}^{100}$ vektortér alábbi altereinek dimenzióját, és adjon meg bázist bennük:

(a) $\{(x_1, \ldots, x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 0\}$;

(b) $\{(x_1, \ldots, x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \cdots = x_{99}\}$;

(c) $\{(x_1, \ldots, x_{100})\colon\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{50} = x_{51} + x_{52} + \cdots + x_{100}\}$.

7.15. Feladat. Döntse el, hogy a megadott vektorrendszer bázist alkot-e a legfeljebb n-edfokú T test feletti polinomok vektorterében:

(a) x^n, $x^{n-1} + x^n, \ldots, 1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n$;

(b) 1, $1 + x$, $(1 + x)^2, \ldots, (1 + x)^n$.

7.16. Feladat. Legyen U_1 és U_2 két altér a V vektortérben. Ha V dimenziója 10, U_1-é 8, U_2-é pedig 9, akkor hány dimenziós lehet az $U_1 \cap U_2$ altér?