6. feladatsor – Vektorterek – Eredmények

6.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) A V vektortér U részhalmaza pontosan akkor altér V-ben, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.
(b) Tetszőleges V vektortérbeli $v_1, \ldots, v_k$ vektoroknak egyetlen lineáris kombinációja van, mégpedig a $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ vektor.
(c) A $\mathbb{Z}_2^2$ vektortérben az $(1,0), (0,1)$ vektoroknak négy lineáris kombinációja van.
(d) A V vektortér $[v_1, \ldots, v_k]$ altere pontosan azokat a vektorokat tartalmazza, amelyek előállnak a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.
(e) Ha U, U_1, U_2 olyan alterek a V vektortérben, melyekre $U_1, U_2 \subseteq U$, akkor $U_1 + U_2 \subseteq U$ is fennáll.
(f) Minden T test feletti n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak a T^n vektortérben.
(g) Ha egy T test feletti n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer (valamelyik) általános megoldásában a kötött ismeretlenek száma r, akkor a megoldások altere megadható r elemű generátorrendszerrel.
(h) Ha egy T test feletti n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak altere megadható k elemű generátorrendszerrel, akkor az egyenletrendszer (valamelyik) általános megoldásában a szabad ismeretlenek száma legfeljebb k.

Eredmény. igaz: (c),(d),(e),(h)
hamis: (a),(b),(f),(g)

6.2. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi U részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1x_2 + x_3 = 0\}$;
(f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$.

Eredmény. altér: (b),(c),(f)
nem altér: (a),(d),(e)

6.3. Feladat. Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektortérben az alábbi halmazok:

(a) $U = \{A : |A| = 0\}$;
(b) $U = \{A : |A| \neq 0\}$;
(c) $U = \{A : A^T = A\}$?

Eredmény. altér: (c)
nem altér (a),(b)

6.4. Feladat. Döntse el, hogy a V vektortérben a v vektor eleme-e az U altérnek?

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ v = (1, -1, 1),\ U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$;

(b) $V=\mathbb{Q}^3,\ v=(1,1,1),\ U=[(1,-1,2),(1,0,1)]$;
(c) $V=\mathbb{R}^3,\ v=(1,2,1),\ U=[(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)]$;
(d) $V=\mathbb{R}^3,\ v=(1,2,1),\ U=[(1,1,1),(1,0,-1),(2,1,0)]$;
(e) $V=\mathbb{R}^4,\ v=(3,4,-1,2),\ U=[(1,0,-3,2),(-1,2,7,-4)]$;
(f) $V=\mathbb{Q}^4,\ v=(1,-1,-2,1),\ U=[(1,1,3,0),(2,3,2,1),(3,2,-1,1)]$;
(g) $V=\mathbb{Z}_3^4,\ v=(1,0,0,1),\ U=[(1,1,1,0),(-1,0,1,0),(1,1,0,-1)]$;
(h) $V=\mathbb{R}^{2\times2},\ v=\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix},\ U=\left[\begin{pmatrix}1&0\\-3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&2\\7&-4\end{pmatrix}\right]$;
(i) $V=\mathbb{Z}_3^{2\times2},\ v=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ U=\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\right]$;
(j) $V=\mathbb{R}[x]$ (az $\mathbb{R}$ feletti polinomok vektortere), $v=3+4x-x^2+2x^3$, $U=[1-3x^2+2x^3,\ -1+2x+7x^2-4x^3]$;
(k) $V=\mathbb{Z}_3[x]$ (a $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere), $v=1+x^3$, $U=[1+x+x^2,\ -1+x^2,\ 1+x-x^3]$.

Eredmény. eleme: (a),(c),(e),(g),(h),(i),(j),(k)
nem eleme: (b),(d),(f)

6.5. Feladat. Adja meg a V vektortér U alterét generátorrendszer segítségével:
(a) $V=\mathbb{R}^3,\ U=\{(x_1,x_2,x_3):2x_1-x_3=0\}$;
(b) $V=\mathbb{R}^3,\ U=\{(x_1,x_2,x_3):2x_1-x_3=0,\ x_1+x_2=0\}$;
(c) $V=\mathbb{Q}^4,\ U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$;
(d) $V=\mathbb{Q}^4,\ U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-x_2+3x_3-2x_4=0,\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$;
(e) $V=\mathbb{Q}^{2\times2},\ U=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}:x_1-x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0\right\}$;
(f) $V=\mathbb{Z}_3^{2\times2},\ U=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}:x_1+x_2-x_3=0,\ x_2+x_3-x_4=0\right\}$;
(g) $V=\mathbb{Z}_2^{2\times3},\ U=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{pmatrix}:x_1+x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0,\ x_3+x_4+x_5+x_6=0\right\}$.

Eredmény. (a) $U=[(1,0,2),(0,1,0)]$
(b) $U=[(-1,1-2)]$
(c) $U=[(-2,-1,1,0),(-1,-1,0,1)]$
(d) $U=[(1,-1,0,1)]$
(e) $U=\left[\begin{pmatrix}-2&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}\right]$
(f) $U=\left[\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right]$
(g) $U=\left[\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right]$

6.6. Feladat. Adja meg a V vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret egyenletrendszer segítségével (azaz keressen olyan lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásvektorai éppen a kifeszített altér vektorai):
(a) $V=\mathbb{R}^3,\quad u=(1,1,1),\ v=(1,-1,5)$;
(b) $V=\mathbb{R}^3,\quad u=(2,2,-4),\ v=(1,0,3)$;

(c) $V=\mathbb{R}^3$, $\quad u=(1,1,1),\ v=(-2,2,-2),\ w=(3,-1,3)$;
(d) $V=\mathbb{R}^3$, $\quad u=(1,1,1),\ v=(-2,2,-2),\ w=(0,-1,3)$;
(e) $V=\mathbb{Z}_2^4$, $\quad u=(1,1,0,1),\ v=(1,0,1,0)$;
(f) $V=\mathbb{Z}_2^4$, $\quad u=(1,1,0,1),\ v=(1,0,1,0),\ w=(1,0,1,1)$;
(g) $V=\mathbb{R}^4$, $\quad u=(2,2,-2,4),\ v=(-4,-5,6,-5)$;
(h) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\quad u=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$;
(i) $V=\mathbb{Z}_3^{2\times 2}$, $\quad u=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Eredmény. (a) $\{(x_1,x_2,x_3) : -3x_1+2x_2+x_3=0\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3) : -3x_1+5x_2+x_3=0\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3) : x_1-x_3=0\}$
(d) $\{(x_1,x_2,x_3) : 0x_1=0\}$
(e) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_3+x_4=0,\ x_2+x_4=0\}$
(f) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2+x_3=0\}$
(g) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : -x_1+2x_2+x_3=0,\ -5x_1+3x_2+x_4=0\}$
(h) $\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} : 2x_2-x_4=0\right\}$
(i) $\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} : x_1-x_2+x_3-x_4=0\right\}$

6.7. Feladat. Döntse el, hogy a V vektortérben teljesül-e az $U_1=U_2$ egyenlőség. Továbbá adja meg az $U_1\cap U_2$ és U_1+U_2 altereket egyenletrendszer és generátorrendszer segítségével is.
(a) $V=\mathbb{R}^3$, $U_1=[(1,2,1),(-1,1,1)]$, $U_2=[(0,3,2),(-2,-1,0)]$;
(b) $V=\mathbb{R}^3$, $U_1=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1-x_2+x_3=0\}, U_2=[(1,2,1)]$;
(c) $V=\mathbb{Z}_3^3$, $U_1=[(1,-1,0),(0,1,1)]$, $U_2=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2-x_3=0\}$;
(d) $V=\mathbb{R}^4$, $U_1=[(1,0,1,-1),(-2,1,0,-1),(3,-4,-6,7)]$,
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 3x_1+7x_2-2x_3+x_4=0, x_1+2x_2-x_3=0\}$;
(e) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $U_1=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & -4\\ -6 & 7\end{pmatrix}\right]$,
$U_2=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} : 3x_1+7x_2-2x_3+x_4=0\right\}$.

Eredmény. (a) $U_1=U_2$, és ezért $U_1=U_2=U_1\cap U_2=U_1+U_2$
$U_1=U_2=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1-2x_2+3x_3=0\}$
(b) $U_2 \subsetneqq U_1$, és ezért $U_1\cap U_2=U_2,\ U_1+U_2=U_1$
$U_1=[(1,1,0),(-1,0,1)]$
$U_2=\{(x_1,x_2,x_3) : x_1-x_3=0,\ 2x_1-x_2=0\}$
(c) $U_1=U_2$, és ezért $U_1=U_2=U_1\cap U_2=U_1+U_2$
(d) $U_2 \subsetneqq U_1$, és ezért $U_1\cap U_2=U_2,\ U_1+U_2=U_1$
$U_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 3x_1+7x_2-2x_3+x_4=0\}$
$U_2=[(3,-1,1,0),(2,-1,0,1)]$
(e) $U_1=U_2$, és ezért $U_1=U_2=U_1\cap U_2=U_1+U_2$