6. feladatsor – Vektorterek

6.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) A V vektortér U részhalmaza pontosan akkor altér V-ben, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.
(b) Tetszőleges V vektortérbeli $v_1, \dots, v_k$ vektoroknak egyetlen lineáris kombinációja van, mégpedig a $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ vektor.
(c) A $\mathbb{Z}_2^2$ vektortérben az $(1,0), (0,1)$ vektoroknak négy lineáris kombinációja van.
(d) A V vektortér $[v_1, \dots, v_k]$ altere pontosan azokat a vektorokat tartalmazza, amelyek előállnak a $v_1, \dots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.
(e) Ha U, U_1, U_2 olyan alterek a V vektortérben, melyekre $U_1, U_2 \subseteq U$, akkor $U_1 + U_2 \subseteq U$ is fennáll.
(f) Minden T test feletti n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak a T^n vektortérben.
(g) Ha egy T test feletti n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer (valamelyik) általános megoldásában a kötött ismeretlenek száma r, akkor a megoldások altere megadható r elemű generátorrendszerrel.
(h) Ha egy T test feletti n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak altere megadható k elemű generátorrendszerrel, akkor az egyenletrendszer (valamelyik) általános megoldásában a szabad ismeretlenek száma legfeljebb k.

6.2. Feladat. Állapítsa meg, hogy az alábbi U részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben:

(a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
(b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$;
(c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$;
(d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
(e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1x_2 + x_3 = 0\}$;
(f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$.

6.3. Feladat. Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektortérben az alábbi halmazok:

(a) $U = \{A : |A| = 0\}$;
(b) $U = \{A : |A| \neq 0\}$;
(c) $U = \{A : A^T = A\}$?

6.4. Feladat. Döntse el, hogy a V vektortérben a v vektor eleme-e az U altérnek?

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ v = (1, -1, 1),\ U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$;
(b) $V = \mathbb{Q}^3,\ v = (1, 1, 1),\ U = [(1, -1, 2), (1, 0, 1)]$;
(c) $V = \mathbb{R}^3,\ v = (1, 2, 1),\ U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$;
(d) $V = \mathbb{R}^3,\ v = (1, 2, 1),\ U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$;
(e) $V = \mathbb{R}^4,\ v = (3, 4, -1, 2),\ U = [(1, 0, -3, 2), (-1, 2, 7, -4)]$;
(f) $V = \mathbb{Q}^4,\ v = (1, -1, -2, 1),\ U = [(1, 1, 3, 0), (2, 3, 2, 1), (3, 2, -1, 1)]$;
(g) $V = \mathbb{Z}_3^4,\ v = (1, 0, 0, 1),\ U = [(1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, -1)]$;
(h) $V = \mathbb{R}^{2\times 2},\ v = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}\right]$;

(i) $V=\mathbb{Z}_3^{2\times 2},\ v=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ U=\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\right];$
(j) $V=\mathbb{R}[x]$ (az $\mathbb{R}$ feletti polinomok vektortere), $v=3+4x-x^2+2x^3$, $U=[1-3x^2+2x^3,\ -1+2x+7x^2-4x^3]$;
(k) $V=\mathbb{Z}_3[x]$ (a $\mathbb{Z}_3$ feletti polinomok vektortere), $v=1+x^3$, $U=[1+x+x^2,\ -1+x^2,\ 1+x-x^3]$.

6.5. Feladat. Adja meg a V vektortér U alterét generátorrendszer segítségével:

(a) $V=\mathbb{R}^3,\ U=\{(x_1,x_2,x_3):2x_1-x_3=0\}$;
(b) $V=\mathbb{R}^3,\ U=\{(x_1,x_2,x_3):2x_1-x_3=0,\ x_1+x_2=0\}$;
(c) $V=\mathbb{Q}^4,\ U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$;
(d) $V=\mathbb{Q}^4,\ U=\{(x_1,x_2,x_3,x_4):x_1-x_2+3x_3-2x_4=0,\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=0,\ x_2+x_3+x_4=0\}$;
(e) $V=\mathbb{Q}^{2\times 2},\ U=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}:x_1-x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0\right\}$;
(f) $V=\mathbb{Z}_3^{2\times 2},\ U=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}:x_1+x_2-x_3=0,\ x_2+x_3-x_4=0\right\}$;
(g) $V=\mathbb{Z}_2^{2\times 3},\ U=\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\x_4&x_5&x_6\end{pmatrix}:x_1+x_2+x_3=0,\ x_2+x_3+x_4=0,\ x_3+x_4+x_5+x_6=0\right\}$.

6.6. Feladat. Adja meg a V vektortérben a megadott vektorok által kifeszített alteret egyenletrendszer segítségével (azaz keressen olyan lineáris egyenletrendszert, amelynek megoldásvektorai éppen a kifeszített altér vektorai):

(a) $V=\mathbb{R}^3,\quad u=(1,1,1),\ v=(1,-1,5)$;
(b) $V=\mathbb{R}^3,\quad u=(2,2,-4),\ v=(1,0,3)$;
(c) $V=\mathbb{R}^3,\quad u=(1,1,1),\ v=(-2,2,-2),\ w=(3,-1,3)$;
(d) $V=\mathbb{R}^3,\quad u=(1,1,1),\ v=(-2,2,-2),\ w=(0,-1,3)$;
(e) $V=\mathbb{Z}_2^4,\quad u=(1,1,0,1),\ v=(1,0,1,0)$;
(f) $V=\mathbb{Z}_2^4,\quad u=(1,1,0,1),\ v=(1,0,1,0),\ w=(1,0,1,1)$;
(g) $V=\mathbb{R}^4,\quad u=(2,2,-2,4),\ v=(-4,-5,6,-5)$;
(h) $V=\mathbb{R}^{2\times 2},\quad u=\begin{pmatrix}1&2\\-3&4\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}-3&0\\-3&0\end{pmatrix}$;
(i) $V=\mathbb{Z}_3^{2\times 2},\quad u=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

6.7. Feladat. Döntse el, hogy a V vektortérben teljesül-e az $U_1=U_2$ egyenlőség. Továbbá adja meg az $U_1\cap U_2$ és U_1+U_2 altereket egyenletrendszer és generátorrendszer segítségével is.

(a) $V=\mathbb{R}^3,\ U_1=[(1,2,1),(-1,1,1)],\ U_2=[(0,3,2),(-2,-1,0)]$;
(b) $V=\mathbb{R}^3,\ U_1=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1-x_2+x_3=0\},U_2=[(1,2,1)]$;
(c) $V=\mathbb{Z}_3^3,\ U_1=[(1,-1,0),(0,1,1)],\ U_2=\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1+x_2-x_3=0\}$;
(d) $V=\mathbb{R}^4,\ U_1=[(1,0,1,-1),(-2,1,0,-1),(3,-4,-6,7)]$, $U_2=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon 3x_1+7x_2-2x_3+x_4=0,x_1+2x_2-x_3=0\}$;

(e) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}\right]$,
$U_2 = \left\{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\right\}$.

Szorgalmi feladatok

6.8. Feladat. Igazolja, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^{\lambda}.$$

6.9. Feladat. Igazolja, hogy bármely halmaz hatványhalmaza vektorteret alkot $\mathbb{Z}_2$ felett, ha „összeadásnak” a szimmetrikus differencia képzését tekintjük. (A skalárral való szorzást miért nem kell külön definiálni?)

6.10. Feladat. Alteret alkot-e az U részhalmaz a V vektortérben?

(a) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, U a felső trianguláris mátrixok halmaza;
(b) $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, $U = \{A : AB = BA\}$, ahol B rögzített mátrix;
(c) V a $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomok vektortere, U azoknak a $\mathbb{Z}_2$ feletti polinomoknak a halmaza, amelyeknek $\mathbb{Z}_2$ mindkét eleme zérushelye.

6.11. Feladat. Alteret alkotnak-e a megadott részhalmazok a valós számsorozatok $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vektorterében:

(a) azon valós számsorozatok halmaza, amelyeknek tagjai véges sok kivételével 0-val egyenlők;
(b) a számtani sorozatok halmaza;
(c) a mértani sorozatok halmaza (megengedve a csupa 0-ból álló sorozatot is);
(d) a monoton sorozatok halmaza.

6.12. Feladat. Alteret alkotnak-e a megadott részhalmazok az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vektortérben:

(a) a páros függvények halmaza;
(b) a periodikus függvények halmaza;
(c) a véges sok zérushellyel rendelkező függvények halmaza;
(d) azon függvények halmaza, amelyeknek a 0 helyen zérushelye van;
(e) azon függvények halmaza, amelyek értékkészlete az egész számok halmaza.

6.13. Feladat. Igazolja, hogy egy vektortér soha nem állhat elő két valódi alterének uniójaként.

6.14. Feladat. Igazolja, hogy $n \geq 2$ esetén a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortér előáll három valódi alterének uniójaként.

6.15. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

6.16. Feladat. Keresse meg a $\mathbb{Z}_2^3$ vektortér összes alterét, és ábrázolja a köztük fennálló tartalmazásokat Hasse-diagrammal.

6.17. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e a következő állítások:
(a) Az $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $x-1 \in [x^3-1,\ x^3-x,\ x^3-x^2,\ 2x^2-3x+1]$.
(b) Az $\mathbb{R}[x]$ vektortérben $x+1 \in [x^3-1,\ x^3-x,\ x^3-x^2,\ 2x^2-3x+1]$.
(c) Az $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ vektortérben $\dfrac{1}{x} \in \left[1, \dfrac{1}{1+x}\right]$.

6.18. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges vektortér minden U, V, W alterére teljesül, hogy ha $U \subseteq W$, akkor $(U+V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)$.

6.19. Feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér $X = [(1, 1, \ldots, 1)]$ és $Y = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) :\ a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 0\}$ altereire teljesül, hogy $X \cap Y = \{\underline{0}\}$ és $X + Y = \mathbb{R}^n$.