5. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek – Eredmények

5.1. Feladat. Legyen adott egy számtest feletti m egyenletből álló n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $n > m$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(b) Ha $n = m$, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
(c) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
(d) Ha $n < m$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(e) Ha $m < n$, akkor az egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.
(f) Ha $n = m$ és az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
(g) Ha $n = m$ és az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

Eredmény. hamis, hamis, hamis, hamis, igaz, igaz, hamis

5.2. Feladat. Oldja meg Gauss-eliminációval az alábbi valós számtest feletti lineáris egyenletrendszereket. Ha lehetséges, Cramer-szabállyal is oldja meg őket.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array};$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array};$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array};$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcr} 18x_1 & + & 9x_2 & + & 23x_3 & = & 50 \\ 17x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & = & 42 \\ 21x_1 & + & 20x_2 & - & 10x_3 & = & 31 \end{array}.$$

Eredmény. (a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$
(b) ellentmondás
(c) $x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4$
$x_3 = 4 + x_4$
$x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

(d) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$
(e) $x_1 = \frac{1}{2}(-1 + x_2 + x_5)$
$x_3 = 3 - 4x_5$
$x_4 = 0$
$x_2, x_5 \in \mathbb{R}$
(f) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

5.3. Feladat. Oldja meg Gauss-eliminációval a $\mathbb{Z}_2$ feletti (a),(b),(c) és a $\mathbb{Z}_3$ feletti (d),(e),(f) lineáris egyenletrendszereket. Az általános megoldás megadása mellett soroja is fel az összes megoldást. Ha lehetséges, Cramer-szabállyal is oldja meg az egyenletrendszereket.

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array};$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array};$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{ccccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(d)}\quad \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \end{array};$$

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{ccccccccc} & & -x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array};$$

$$\text{(f)}\quad \begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \end{array}.$$

Eredmény. (a) $x_1 = x_2 = 1,\ x_3 = 0$
(b) $x_1 = 1 + x_3 + x_4,\ x_2 = 1 + x_3,\ x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_2$
$(1,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1)$
(c) $x_1 = x_3 + x_4,\ x_2 = 1 + x_3 + x_5,\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_2$
$(0,1,0,0,0), (0,0,0,0,1), (1,1,0,1,0), (1,0,0,1,1),$
$(1,0,1,0,0), (1,1,1,0,1), (0,0,1,1,0), (0,1,1,1,1)$
(d) $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$
(e) ellentmondás
(f) $x_1 = 0,\ x_2 = -x_4,\ x_3 = 1 + x_4$
$(0,0,1,0), (0,-1,-1,1), (0,1,0,-1)$

5.4. Feladat. Határozza meg a következő valós mátrixok inverzét:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. lásd **4.5. Feladat**

5.5. Feladat. Határozza meg az

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixok inverzét és az

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_2$ feletti mátrixok inverzét.

Eredmény. lásd **4.6. Feladat**

5.6. Feladat. Oldja meg a

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(b)}\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

valós számtest feletti mátrixegyenleteket, az

$$\text{(c)}\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_2$ feletti mátrixegyenletet, valamint a

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixegyenletet.

Eredmény. (a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix} -3+5x_{12}+x_{13} & x_{12} & x_{13} & 2-3x_{12} \\ -5+5x_{22}+x_{23} & x_{22} & x_{23} & 2-3x_{22} \\ -2+5x_{32}+x_{33} & x_{32} & x_{33} & 2-3x_{32} \end{pmatrix}$

(c) ellentmondás

(d) $X = \begin{pmatrix} -1-x_{31} & 1-x_{32} \\ 1+x_{31} & x_{32} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$