5. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek

5.1. Feladat. Legyen adott egy számtest feletti m egyenletből álló n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha $n > m$, akkor az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.
(b) Ha $n = m$, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.
(c) Ha az egyenletrendszernek pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
(d) Ha $n < m$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.
(e) Ha $m < n$, akkor az egyenletrendszernek nem lehet pontosan egy megoldása.
(f) Ha $n = m$ és az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
(g) Ha $n = m$ és az egyenletrendszer együtthatóiból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

5.2. Feladat. Oldja meg Gauss-eliminációval az alábbi valós számtest feletti lineáris egyenletrendszereket. Ha lehetséges, Cramer-szabállyal is oldja meg őket.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array} ;$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array} ;$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array} ;$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array} ;$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array} ;$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcr} 18x_1 & + & 9x_2 & + & 23x_3 & = & 50 \\ 17x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & = & 42 \\ 21x_1 & + & 20x_2 & - & 10x_3 & = & 31 \end{array} .$$

5.3. Feladat. Oldja meg Gauss-eliminációval a $\mathbb{Z}_2$ feletti (a),(b),(c) és a $\mathbb{Z}_3$ feletti (d),(e),(f) lineáris egyenletrendszereket. Az általános megoldás megadása mellett soroja is fel az összes megoldást. Ha lehetséges, Cramer-szabállyal is oldja meg az egyenletrendszereket.

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array};$$

$$\text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array};$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \end{array};$$

$$\text{(d)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \end{array};$$

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} & & -x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array};$$

$$\text{(f)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -1 \end{array}.$$

5.4. Feladat. Határozza meg a következő valós mátrixok inverzét:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.5. Feladat. Határozza meg az

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixok inverzét és az

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_2$ feletti mátrixok inverzét.

5.6. Feladat. Oldja meg a

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

valós számtest feletti mátrixegyenleteket, az

(c) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_2$ feletti mátrixegyenletet, valamint a

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixegyenletet.

Szorgalmi feladatok

5.7. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b, c valós paraméterek:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & c \end{array}.$$

5.8. Feladat. Oldja meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 & = & 1 \\ x_1 + (1-a)x_3 + (a-1)x_4 & = & 2 \\ x_1 - ax_3 + (a-2)x_4 & = & 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 & = & 3a-1 \end{array}.$$

5.9. Feladat. Oldja meg (az a valós paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & = & a+4 \end{array}.$$

5.10. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszert, ahol a valós paraméter:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}.$$

5.11. Feladat. Keresse meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását:

$$\begin{array}{rcrcccrcl}
x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & \cdots & + & a_nx_n & = & b \\
a_1^2x_1 & + & a_2^2x_2 & + & \cdots & + & a_n^2x_n & = & b^2 \\
 & & & & & & & & \vdots \\
a_1^{n-1}x_1 & + & a_2^{n-1}x_2 & + & \cdots & + & a_n^{n-1}x_n & = & b^{n-1}
\end{array}$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ páronként különböző valós számok).

5.12. Feladat. Keresse meg a következő racionális számtest feletti lineáris egyenletrendszer általános megoldását:

$$\begin{array}{rcrcrcccrcl}
ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & \vdots \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & ax_n & = & 1
\end{array}$$

($a \in \mathbb{Q}$ tetszőleges).

Oldja meg a lineáris egyenletrendszert $\mathbb{Q}$ helyett a $\mathbb{Z}_2$ testre is.

5.13. Feladat. Határozza meg $n = 2$ és $n = 3$ esetén, hogy hány n egyenletből álló n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer van $\mathbb{Z}_2$ felett, és azt is, hogy ezek közül hány szabályos. (Két lineáris egyenletrendszer akkor különböző, ha bővített mátrixuk különböző.)

5.14. Feladat. Számítsa ki az alábbi $n \times n$-es valós mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.$$

5.15. Feladat. Számítsa ki az alábbi $\mathbb{Z}_3$ feletti $n \times n$-es (n páratlan) mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & 1
\end{pmatrix}.$$

5.16. Feladat. Egyszer volt, hol nem volt, volt egyszer hét kicsi kecske. A mamájuk hozott nekik $2,1$ liter tejecskét, és szétosztotta a hét kicsi bögrécskébe, de nem sikerült igazságosan elosztania. Az első kicsi kecske így szólt: „Én annyira szeretem a testvérkéimet, hogy inkább lemondok a tejecskémről a javukra." Azzal egyenlően szét is osztotta a tejecskéjét a hat testvérkéje között. A második kicsi kecske is nagyon jószívű volt, ő is szétosztotta a bögrécskéjében lévő tejecskét hat testvérkéje között. Így tett sorban a többi kicsi kecske is. És lássatok csudát! A végén minden kicsi bögrécskében ugyanannyi tejecske volt, mint a legelején. Azaz mennyi?