4. feladatsor – Determinánsok (folyt.), mátrix inverze – Eredmények

4.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Legyenek $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ kiválasztott sor- és oszlopindexek a D determinánsban, és jelölje $i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-k}$, illetve $j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_{n-k}$ a kimaradó sor-, illetve oszlopindexeket. Ekkor a D determinánsban

$$A^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k} = (-1)^{i'_1+\cdots+i'_{n-k}+j'_1+\cdots+j'_{n-k}} M^{j'_1,\ldots,j'_{n-k}}_{i'_1,\ldots,i'_{n-k}}.$$

Tetszőleges $A, B \in T^{n\times n}$ mátrix esetén

(b) ha A, B nemelfajuló, akkor $A + B$ is az;
(c) ha A, B elfajuló, akkor $A + B$ is az;
(d) ha A, B nemelfajuló, akkor AB is az;
(e) ha A, B elfajuló, akkor AB is az.

(f) Nemelfajuló diagonális mátrix inverze is diagonális.
(g) Nemelfajuló felső trianguláris mátrix inverze is felső trianguláris.
(h) Tetszőleges $A, B \in T^{n\times n}$ nemelfajuló mátrixok esetén az $AB = BA$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ teljesül.
(i) Az $E \in T^{n\times n}$ egységmátrix csak önmagával hasonló.
(j) Ha $A, B \in T^{n\times n}$ hasonló mátrixok és A diagonális, akkor B is az.

Eredmény. igaz, hamis, hamis, igaz, igaz, igaz, igaz, igaz, igaz, hamis

4.2. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi valós determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Eredmény. (a) 90
(b) 12
(c) 228

4.3. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az (a)-beli $\mathbb{Z}_2$ és (b)-beli $\mathbb{Z}_3$ feletti determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Eredmény. (a) 1
(b) -1

4.4. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Eredmény. (a) $(a_1a_2 - b_1b_2)(c_1c_2 - d_1d_2)$
(b) $(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) - 2(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3)$

4.5. Feladat. Határozza meg a következő valós mátrixok inverzét:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. A determinánsok rendre: $2, -1, 1, -1, -16, -102$.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 16 & -9 \\ 6 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -15 & 5 & 8 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $-\frac{1}{102} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -26 & 18 & -40 \\ 24 & 2 & -21 & 7 \\ 0 & 34 & 0 & -34 \\ -12 & -18 & -15 & 39 \end{pmatrix}$

4.6. Feladat. Határozza meg az

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixok inverzét és az

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix};\quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix};\quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix}1&1&0&0&1\\1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_2$ feletti mátrixok inverzét.

Eredmény. A determinánsok rendre: $-1, -1, -1, 1, 1, 0$.

(a) $\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\1&-1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\-1&-1&-1&-1\\1&0&-1&-1\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}-1&-1&0&0&0\\0&0&-1&1&-1\\0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\\-1&1&-1&1&-1\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&1\end{pmatrix}$

(f) nem létezik az inverz

4.7. Feladat. Oldja meg az (a),(b),(c) $\mathbb{R}$ feletti , a (d) $\mathbb{Z}_2$ feletti és az (e) $\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixegyenleteket:

(a) $\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}6&0\\10&1\end{pmatrix}$;

(b) $X\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14&6\\5&5\end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&7\\-3&2&2\end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix}10&1\\29&5\\8&5\end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$;

(e) $X\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

Eredmény. (a) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.8. Feladat. Legyen $A \in T^{n \times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, melyre $A^k = \underline{0}$. Igazolja, hogy ekkor $E - A$ nemelfajuló és $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.