4. feladatsor – Determinánsok (folyt.), mátrix inverze

4.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Legyenek $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ kiválasztott sor- és oszlopindexek a D determinánsban, és jelölje $i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_{n-k}$, illetve $j'_1 < j'_2 < \cdots < j'_{n-k}$ a kimaradó sor-, illetve oszlopindexeket. Ekkor a D determinánsban

$$A^{j_1,\ldots,j_k}_{i_1,\ldots,i_k} = (-1)^{i'_1+\cdots+i'_{n-k}+j'_1+\cdots+j'_{n-k}} M^{j'_1,\ldots,j'_{n-k}}_{i'_1,\ldots,i'_{n-k}}.$$

Tetszőleges $A, B \in T^{n\times n}$ mátrix esetén

(b) ha A, B nemelfajuló, akkor $A + B$ is az;
(c) ha A, B elfajuló, akkor $A + B$ is az;
(d) ha A, B nemelfajuló, akkor AB is az;
(e) ha A, B elfajuló, akkor AB is az.

(f) Nemelfajuló diagonális mátrix inverze is diagonális.
(g) Nemelfajuló felső trianguláris mátrix inverze is felső trianguláris.
(h) Tetszőleges $A, B \in T^{n\times n}$ nemelfajuló mátrixok esetén az $AB = BA$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ teljesül.
(i) Az $E \in T^{n\times n}$ egységmátrix csak önmagával hasonló.
(j) Ha $A, B \in T^{n\times n}$ hasonló mátrixok és A diagonális, akkor B is az.

4.2. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi valós determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.3. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az (a)-beli $\mathbb{Z}_2$ és (b)-beli $\mathbb{Z}_3$ feletti determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

4.4. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ b_2 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{vmatrix}.$$

4.5. Feladat. Határozza meg a következő valós mátrixok inverzét:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.6. Feladat. Határozza meg az

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixok inverzét és az

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{Z}_2$ feletti mátrixok inverzét.

4.7. Feladat. Oldja meg az (a),(b),(c) $\mathbb{R}$ feletti , a (d) $\mathbb{Z}_2$ feletti és az (e) $\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixegyenleteket:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.8. Feladat. Legyen $A \in T^{n\times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, melyre $A^k = \underline{0}$. Igazolja, hogy ekkor $E - A$ nemelfajuló és $(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

Szorgalmi feladatok

4.9. Feladat. A Laplace-tétel alkalmazásával számítsa ki az alábbi $2n$ rendű determinánst:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

4.10. Feladat. Legyenek A, B, C, D harmadrendű determinánsok, melyeket az

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

mátrixból kapunk oly módon, hogy rendre töröljük az első, második, harmadik és negyedik oszlopot. Bizonyítsa be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC.$$

4.11. Feladat. Legyen $f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + \dots + a_{in}x^{n-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, ahol $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Képezzük az együtthatókból a

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinánst, és legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ rögzített számok. Adja meg az

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

determináns értékét $D, x_1, \dots, x_n$ segítségével. (D-t nem kell kiszámolni!)

4.12. Feladat. A determinánsok szorzástételét alkalmazva (a determináns sorainak/oszlopainak átalakítása nélkül) számítsa ki a

$$\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \dots & \sin(\alpha_1 + \alpha_n) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \dots & \sin(\alpha_2 + \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\alpha_n + \alpha_1) & \sin(\alpha_n + \alpha_2) & \dots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}$$

determinánst.

4.13. Feladat. Tetszőleges T test és tetszőleges $n \geq 2$ esetén adjon meg olyan $T^{n\times n}$-beli mátrixot, mely nem diagonális, és inverze önmaga.

4.14. Feladat. Legyen $A \in T^{n\times n}$ nemelfajuló mátrix. Adja meg a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \in T^{(n+1)\times(n+1)}$$

mátrix inverzét A^{-1} segítségével.

4.15. Feladat. Számítsa ki tetszőleges T test felett az alábbi $n \times n$-es mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4.16. Feladat. Határozza meg a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$n \times n$-es valós mátrix inverzét.

4.17. Feladat. Oldja meg az $AX^{-1}B - C = AX^{-1}$ mátrixegyenletet, ahol A, B, C az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.18. Feladat. Legyen A nemelfajuló valós mátrix. Bizonyítsa be, hogy ha A és A^{-1} minden eleme nemnegatív, akkor A minden sorában és minden oszlopában pontosan egy nemnulla elem áll.

4.19. Feladat. Bizonyítsa be tetszőleges $A, B \in T^{n\times n}$ esetén, hogy ha $AB + A + B = \underline{0}$, akkor $AB = BA$.