3. feladatsor – Determinánsok – Eredmények

3.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám.
(b) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determinánsa is irracionális szám.
(c) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
(d) Ha egy tetszőleges T test feletti 2×2-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának skalárszorosa.
(e) Ha egy tetszőleges T test feletti 2×2-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának skalárszorosa.
(f) Ha egy tetszőleges T test feletti 3×3-as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának skalárszorosa.
(g) Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti $n \times n$-es mátrix minden eleme páros szám, akkor a mátrix determinánsa 2^n-nel osztható egész szám.
(h) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
(i) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

Eredmény. (a) igaz
(b) hamis
(c) igaz
(d) hamis
(e) igaz
(f) hamis
(g) igaz
(h) hamis
(i) hamis

3.2. Feladat. Határozza meg a következő $\mathbb{R}$ feletti determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \text{(e)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}; \qquad \text{(f)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & -4 \\ -3 & -5 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

Eredmény. (a) 14
(b) -70
(c) 96
(d) -21
(e) -432
(f) -1793

3.3. Feladat. Határozza meg az

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{Z}_3$ feletti determinánsokat és az

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{Z}_2$ feletti determinánsokat.

Eredmény. (a) -1
(b) -1
(c) 0
(d) 1
(e) 1
(f) 0

3.4. Feladat. Adja meg a $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:

(a) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (1, 0, 3)$;
(b) $v_1 = (1, 8, 5)$, $v_2 = (-2, 5, 11)$, $v_3 = (5, 9, 12)$.

Eredmény. (a) 14
(b) 378

3.5. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & x & -6 \\ x & -7 & -5 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Eredmény. (a) $x = 2$
(b) $x = 4 \pm \sqrt{58}$

3.6. Feladat. Számolja ki a

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{Q}$ feletti determinánst.

Eredmény. 100

3.7. Feladat. Határozza meg x^3 együtthatóját az alábbi $\mathbb{R}$ feletti determinánsban:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

Eredmény. -4

3.8. Feladat. Számítsa ki a következő $\mathbb{Q}$ feletti determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & 27 & 81 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}.$$

Eredmény. (a) -17280
(b) 69120

3.9. Feladat. Számítsa ki a következő $\mathbb{R}$ feletti $n \times n$-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Eredmény. $n!$